



Analyse expérimentale des cinématiques de changement d'échelles en mécanique non linéaire

Jérémy Marty

► To cite this version:

Jérémy Marty. Analyse expérimentale des cinématiques de changement d'échelles en mécanique non linéaire. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2015. Français. NNT : 2015ISAL0013 . tel-01242411

HAL Id: tel-01242411

<https://theses.hal.science/tel-01242411>

Submitted on 12 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Analyse expérimentale des cinématiques de changement d'échelles en mécanique non-linéaire

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Jérémy MARTY

Thèse soutenue le 5 février 2015 devant la Commission d'examen

Jury

R. ESTEVEZ	Professeur des universités	Rapporteur
S. FOREST	Directeur de Recherche CNRS	Rapporteur
M. CORET	Professeur des universités	Examineur
J. YVONNET	Professeur des universités	Examineur
P. KERFRIDEN	Maitre de conférences	Invité
A. COMBESCURE	Professeur des universités	Directeur
J. RÉTHORÉ	Chargé de recherche CNRS	Co-directeur

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 65 55 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Insa : H. CHARLES	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 06.07.53.89.13 e2m2@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTE http://www.ediss-lyon.fr Sec : Samia VUILLERMOZ Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04 72 68 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec : Renée EL MELHEM	Mme Sylvie CALABRETTO Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 infomaths@univ-lyon1.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.ec-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à M. Alain Combescure et M. Julien Réthoré pour m'avoir proposé un sujet qui m'aura passionné durant ces trois années. Je les remercie pour la patience et la confiance qu'ils m'ont accordé pour mener à bien ce projet et pour les discussions scientifiques qui ont émaillées ce projet. Merci également à M. Philippe Chaudet pour l'aide apportée pour le développement du côté expérimental, sa connaissance du matériel optique et son œil avisé pour les mouchetis.

Je remercie également M. Michel Coret d'avoir présidé le jury de thèse. Merci également à M. Rafaël Estevez et M. Samuel Forest d'avoir accepté d'être rapporteur de ces travaux et des discussions qui ont suivi. Merci à M. Pierre Kerfriden et M. Julien Yvonnet d'avoir participé au jury de thèse et pour l'attention qu'ils ont porté à mes travaux.

Je souhaite remercier toutes les personnes du laboratoire et en particulier celles de l'équipe MSE. Il s'agit d'un cadre de travail formidable, avec une ambiance de travail très forte notamment grâce à la qualité humaine de tous les maîtres de conférence et professeurs mais aussi la présence de Mme Isabelle Comby qui veille sur tout ce petit monde. Je remercie plus particulièrement les doctorants, anciens ou nouveaux avec qui j'aurais partagé un peu ou beaucoup de mon quotidien. Que ce soit les anciens : Fabien, Mimile, Aline, Thibault, Yancheng, Père Ced, Père Alex, Gauthier, Dave, Caro, Jikaï, Ddb alias Didier, Benoît, Momo, Lucas, Jin, Sammy, Ppneau, Kéké, Marie ou les nouveaux : Coco, Alex, Nacer, Lu, Hana, Naïm, Lan, Yaya, Nico, Damien, Fatima, Guillermo, Ye, salvatore, Louis, la tribu togolaise (Espoir, Rico, Pipo et Emmanuel) à qui je souhaite une grande réussite.

Je finis par remercier plus particulièrement les deux compères avec qui j'ai commencé la thèse après les avoir rencontrés à l'ENS : Rob le *Yottard* et Clém le *kéké d'Ollioules*. D'autres aventures nous attendent, mais sans méduses espérons-le !

Je remercie également les collègues sportifs, personnels de l'Insa, du CNRS ou de l'université, pour les parties de football le midi. Merci également à ceux avec qui j'ai joué en compétition (à Rillieux, aux fêtes du sport, à la fsgt) ou les anciens amis sportifs du lycée, de la prépa ou de la thèse pour les foots du vendredi soir. Plus particulièrement merci aux coureurs pour les sorties footing le soir ou le week-end (qui permettent d'oublier les frustrations numériques) et de m'avoir entraîné sur certaines courses où les crampes ont eu raison de mes mollets ou/et cuisses...

Il serait difficile d'aller au bout d'une thèse sans le soutien des amis en dehors du cadre professionnel. Certains ont enduré des états d'âme sur des petits trous, d'autres sont présents dans la vie de tous les jours et ont essayé de comprendre ce que je faisais, merci à eux : Cyril, Pierre, BenBen, Vince, Cydrick, Anne-Laure,

Marion, Anne-Laure, Benj, Thibault et bien d'autres.

Merci également à ma famille qui a permis de rendre tout cela possible, qui m'a aiguillé jusqu'à cet instant : en premier lieu mes parents mais bien évidemment aussi mes grands-parents, mes frères et ma nièce, la petite dernière pleine de vie. Enfin, pour finir, j'envoie toutes mes pensées et mes remerciements, pour sa présence et sa patience, pendant ces années et surtout la rédaction, à celle qui partage mon quotidien, ma chère et tendre. Merci également de m'avoir initié au jeu d'échecs, à la patience qui en découle et une autre forme de compétition sportive (finalement ça en ait !).

Résumé

L'industrie se tourne de plus en plus vers les matériaux composites pour leurs très bonnes caractéristiques spécifiques. A l'échelle de la microstructure leur comportement est fortement hétérogène mais à l'échelle de la structure on aimerait les utiliser comme des matériaux homogènes. Les méthodes multi-échelles ont été développées pour résoudre les problèmes de structure avec un temps de calcul raisonnable. Ces méthodes sont en général validées par comparaison avec un calcul numérique où les hétérogénéités sont entièrement maillées.

Dans ce travail de thèse, une structure architecturée modèle a été créée au centre d'une plaque (homogène) mince en acier inoxydable (304L). La cellule unitaire du matériau architecturé est constituée d'un carré percé d'un trou en son centre. L'utilisation d'une caméra à très haute résolution (270 millions de pixels) permet de suivre simultanément l'évolution des déformations aux échelles microscopique et macroscopique. La variation de l'orientation de la structure architecturée par rapport au chargement macroscopique modifie les sollicitations appliquées aux cellules unitaires.

Les expériences réalisées ont pour but d'analyser les cinématiques de déformation des cellules unitaires sous un chargement multi-axial. La mesure de champs permet une analyse quantitative des cinématiques des cellules unitaires et d'investiguer la pertinence des manières de réaliser les changements d'échelles dans le domaine linéaire et non-linéaire. Le passage de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique est particulièrement étudié grâce à la déformation de la frontière des cellules.

A partir de ces mesures, une homogénéisation linéaire et non-linéaire des cellules ayant une cinématique périodique est proposée. La géométrie de la cellule unitaire introduit des symétries dans le comportement du milieu homogène équivalent (MHE), celui-ci devient cubique. Les caractéristiques élastiques du MHE sont obtenues par homogénéisation à partir des résultats expérimentaux. Un critère de Tsai-Hill est identifié dans le domaine non-linéaire.

Enfin, on s'intéresse à la fissuration de la zone architecturée et à l'initiation de la localisation des déformations dans les cellules. Le support de la localisation est calculé à partir du champ des déformations mesurées. La cinématique de la cellule est enrichie avec une discontinuité et le saut de déplacement normal à la fissure est identifié à partir des cinématiques à l'échelle microscopique. Une comparaison avec le saut de déplacement calculé par corrélation d'images étendue à l'échelle macroscopique est menée afin de valider la stratégie d'extraction de la discontinuité à l'échelle microscopique.

Mots clés: Corrélation d'images, méthodes multi-échelles, milieu d'ordre supérieur, mécanique non-linéaire, fissuration.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	xiii
Introduction	1
1 Etat de l'art	3
1.1 L'homogénéisation micromécanique	5
1.1.1 Principe de l'homogénéisation micromécanique	5
1.1.2 Théorie de l'homogénéisation périodique élastique	9
1.1.3 Extension dans le cadre non-linéaire	12
1.1.4 Synthèse	17
1.2 Méthodes numériques multi-échelles	18
1.2.1 Méthodes concurrentes	19
1.2.2 Méthodes semi-concurrentes	20
1.3 Vers une obtention des champs de déplacements en surface	24
1.4 Corrélation d'images numérique	25
1.4.1 Principe de la conservation du flot optique	25
1.4.2 Corrélation d'images locale	26
1.4.3 Méthode globale	27
1.5 Synthèse	31
2 Partie expérimentale	35
2.1 Introduction	37
2.2 Pré-dimensionnement	37
2.2.1 Géométrie de la zone architecturée	37
2.2.2 Choix du matériau	39
2.2.3 Étude de la zone architecturée	39
2.2.4 Bilan	46
2.3 Essais	47
2.3.1 Matériel et dispositif	47
2.3.2 Courbe effort - déplacement	50

2.3.3	Corrélation d'images en grandes déformations	51
2.3.4	Les deux échelles de corrélation : maillages	51
2.3.5	Carte des champs de déplacements et déformations	52
2.3.6	Résidu de la corrélation d'images	58
2.4	Synthèse	60
3	Cinématique de déformation non-linéaire des cellules unitaires	61
3.1	Introduction	63
3.2	Analyse de la périodicité	63
3.2.1	Déformation de la cellule centrale	63
3.2.2	Étude expérimentale de la périodicité des cellules unitaires . .	67
3.2.3	Zone de transition	69
3.2.4	Comparaison du gradient microscopique au gradient macro- scopique	71
3.2.5	Bilan	72
3.3	Simulation des conditions aux limites d'ordre supérieur	73
3.3.1	Différents types de conditions aux limites en déplacement . . .	74
3.3.2	Étude des effets des conditions aux limites d'ordre supérieures sur la réponse des cellules unitaires	77
3.3.3	Cellule unitaire périodique idéale	80
3.3.4	Cellules unitaires du bord	82
3.3.5	Conclusion sur l'intérêt du milieu du second-ordre	88
3.4	Synthèse	89
4	Homogénéisation de la cellule périodique	91
4.1	Introduction	93
4.2	Hypothèses des calculs numériques	93
4.2.1	Conditions aux limites	93
4.2.2	Loi de comportement	94
4.2.3	Calcul des tenseurs homogénéisés	94
4.3	Identification des paramètres élastiques	95
4.3.1	Choix des paramètres élastiques	95
4.3.2	Identification des paramètres élastiques	96
4.3.3	Bilan	99
4.4	Identification de l'écrouissage	100
4.4.1	Surface de charge	100
4.4.2	Critère de Hill	103
4.4.3	Critère de Drucker-Prager	107
4.4.4	Calcul de la loi d'écrouissage	113
4.5	Synthèse	115

5	Vers la localisation de la déformation	117
5.1	Introduction	119
5.2	Géométrie et corrélation d'images sur un pré-essai	119
5.2.1	Géométrie de l'éprouvette	119
5.2.2	Résultat de la corrélation d'images microscopique	120
5.2.3	Corrélation d'images étendue à l'échelle macroscopique	121
5.2.4	Résidu de corrélation d'images	122
5.3	Calcul du saut de déplacement sur le pré-essai	123
5.3.1	Critère de localisation	123
5.3.2	Analyse de la position de la localisation	127
5.3.3	Calcul du saut de déplacement microscopique	128
5.3.4	Calcul du saut de déplacement normal à la ligne de localisation	130
5.3.5	Bilan	131
5.4	Application sur l'éprouvette à 0 degrés	133
5.4.1	Critère de localisation	133
5.4.2	Analyse de la position de la localisation	134
5.4.3	Saut de déplacement microscopique	135
5.4.4	Corrélation d'images étendue	138
5.5	Synthèse	139
	Conclusions et perspectives	141
	Annexe A	145
	Annexe B	151
	Annexe C	155
	Annexe D	159
	Annexe E	165
	Bibliographie	169

Table des figures

1.1	Représentation d'un matériau à deux échelles.	5
1.2	Schématisation des conditions de périodicité haut/bas et gauche/droite.	7
1.3	Maillage d'un quart de section du VER. Contient $(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2})$ fibres.	11
1.4	Variation du module de Young (a) et du coefficient de Poisson (b) en fonction de la taille du VER (m étant le nombre de cellules par côté). DH est la condition de déformation homogène, CH en contrainte homogène et # avec des conditions aux limites périodiques [BOR 01].	12
1.5	Représentation du problème d'Eshelby : à gauche, une inclusion de comportement \mathbf{C}_I noyé dans une matrice de comportement \mathbf{C}_o soumise à une déformation ou une contrainte macroscopique. A droite, le problème équivalent avec une inclusion de comportement \mathbf{C}_o soumise à une déformation libre $\boldsymbol{\varepsilon}^L$	13
1.6	Schématisation de la décomposition de domaine d'une plaque trouée en traction.	19
1.7	Représentation des domaines des modèles macroscopique Ω_M et microscopique Ω_m avec leur zone de recouvrement Ω_{Mm}	20
1.8	Principe de la méthode FE^2 [FEY 00].	22
1.9	Représentation des deux images de la corrélation.	25
1.10	Principe de la corrélation d'images locale : (a) image de référence avec les imagerie, (b) image déformée avec les imagerie déformées.	26
1.11	Principe de la corrélation d'image globale : (a) image de référence avec un maillage élément fini, (b) image déformée avec le maillage déformé.	28
1.12	(a) Région d'intérêt d'une éprouvette CCT soumise à de la traction. (b) Carte d'erreur de la corrélation d'images réalisée avec des éléments Q4. (c) Carte des déplacements normaux de la corrélation d'images avec discontinuité [RÉT 08].	31
1.13	Principe de la méthode FE^2 [KOU 04].	33
2.1	Figure (a) : représentation de la zone architecturée à 0 degré avec une géométrie en cercle ; (b) représentation d'une zone architecturée elliptique, avec un grand axe et un petit axe de longueur A et B , inclinée d'un angle θ	38

2.2	Évolution de la moyenne (a) et de l'écart-type (b) du taux de triaxialité en fonction de la déformation moyenne $\left(\frac{U_y}{L_y}\right)$ de la plaque. Chaque courbe correspond à une géométrie de la zone architecturée différente où R est le rapport de l'ellipse et l'angle l'inclinaison de l'ellipse.	41
2.3	Représentation des paramètres de l'ellipse : longueur du grand axe (paramètre A), longueur du petit axe (paramètre B) et écrasement (paramètre α).	42
2.4	Évolution du rapport (a) et de l'écrasement (b) de l'ellipse macroscopique formant la zone architecturée en fonction de la déformation moyenne $\left(\frac{U_y}{L_y}\right)$ de la plaque.	43
2.5	Évolution de l'inclinaison du grand axe (a) et du petit axe (b) par rapport à leur position initiale de l'ellipse macroscopique. Cette évolution est tracée en fonction de la déformation moyenne $\left(\frac{U_y}{L_y}\right)$ de la plaque.	44
2.6	Repère local (X,Y) et repère global (x,y)	45
2.7	Évolution du rapport (a) et de l'inclinaison (b) de l'ovalisation des trous de la zone architecturée en fonction de la déformation moyenne $\left(\frac{U_y}{L_y}\right)$ de la plaque.	46
2.8	Évolution du résidu de corrélation d'images en fonction de la taille de l'élément (en pixels).	48
2.9	Photographie du montage expérimental mis au point pour la prise d'images sur les éprouvettes.	49
2.10	Visualisation d'un zoom de l'image de référence au centre de la zone architecturée pour les trois orientations du réseau.	50
2.11	Courbe de l'effort en fonction du déplacement machine pour les trois orientations du réseau de trous. Le trait vertical correspond à l'image sélectionnée pour la présentation des résultats de corrélation d'images pour chaque orientation du réseau.	50
2.12	(a) : maillage utilisé pour la corrélation d'images macroscopique; (b) maillage d'une cellule unitaire utilisé pour la corrélation d'images microscopique.	52
2.13	Visualisation du champ de déformation scalaire au sens de von Mises de la corrélation d'images macroscopique pour les trois orientations du réseau.	53
2.14	Visualisation du champ de déformations obtenu par corrélation d'images microscopique pour la zone architecturée à 0 degrés : (a) E_{11} , (b) E_{12} , (c) E_{22} et (d) E_{VM}	54
2.15	Visualisation du champ de déformations obtenu par corrélation d'images microscopique pour la zone architecturée à 30 degrés : (a) E_{11} , (b) E_{12} , (c) E_{22} et (d) E_{VM}	55

2.16	Visualisation du champ de déformations obtenu par corrélation d'images microscopique pour la zone architecturée à 45 degrés : (a) E_{11} , (b) E_{12} , (c) E_{22} et (d) E_{VM}	56
2.17	Visualisation du champ d'erreur de la corrélation d'images macroscopique (a) et microscopique (b) pour le réseau non incliné en niveaux de gris. La dynamique totale de l'image est [0 255] en niveaux de gris.	58
2.18	Visualisation du champ d'erreur de la corrélation d'images macroscopique (a) et microscopique (b) pour le réseau incliné à 30 degrés en niveaux de gris. La dynamique totale de l'image est [0 255] en niveaux de gris.	59
2.19	Visualisation du champ d'erreur de la corrélation d'images macroscopique (a) et microscopique (b) pour le réseau incliné à 45 degrés en niveaux de gris. La dynamique totale de l'image est [0 255] en niveaux de gris.	59
3.1	Déformation du contour de la cellule unitaire centrale pour les trois orientations du réseau. En rouge, le contour initial est comparé au contour obtenu par corrélation d'images macroscopique (bleu) et microscopique (noir).	64
3.2	Évolution des quatre paramètres (a_h , b_h , c_h and d_h) de la projection du déplacement normal pour le bord haut des cellules unitaires pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude.	65
3.3	Évolution des quatre paramètres (a_d , b_d , c_d and d_d) de la projection du déplacement normal pour le bord droit des cellules unitaires pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude.	66
3.4	Évolution de la périodicité entre les bords haut/bas des quatre paramètres (a , b , c et d) pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude.	68
3.5	Évolution de la périodicité entre les bords gauche/droite des quatre paramètres (a , b , c et d) pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude.	68
3.6	Évolution de la périodicité entre les bords haut/bas des quatre paramètres (a , b , c et d) pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude. Les nouvelles valeurs sont tracées en pointillés.	69

3.7	Évolution de la périodicité entre les bords gauche/droite des quatre paramètres (a , b , c et d) pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude. Les nouvelles valeurs sont tracées en pointillés.	70
3.8	Les cellules unitaires avec une cinématique non périodique (entre les bords haut/bas et gauche/droite) sont pointées dans la zone architecturée pour les trois orientations du réseau.	70
3.9	Déformation du contour de la cellule unitaire placée au milieu à droite de la zone architecturée pour les trois orientations du réseau. Le contour initial, en rouge, est comparé au contour obtenu par DIC macroscopique (bleu) et microscopique (noir).	71
3.10	Comparaison des déformations mesurées directement par la DIC macroscopique (courbe bleue) et les déformations calculées à partir de l'analyse des déformations du contour des cellules unitaires par DIC microscopique (courbe rouge). La composante longitudinale du tenseur des déformations (le long du chargement) et la composante transverse (orthogonale au chargement) sont tracées en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude.	72
3.11	Représentation schématique de la cellule unitaire non déformée pour l'identification des tenseur \mathbf{F} and \mathbf{G}	74
3.12	Comparaison de la déformation du contour de la cellule centrale avec un modèle en 2D contraintes planes et un modèle 3D.	78
3.13	Visualisation du déplacement hors plan des simulations 3D avec la face du haut bloqué en déplacement.	79
3.14	Taux de chargement appliqué aux conditions aux limites en fonction du numéro de chargement.	80
3.15	Déformation du contour de la cellule unitaire périodique pour les trois orientations : en rouge le résultat du schéma d'homogénéisation du premier-ordre et en magenta le résultat du schéma d'homogénéisation du second-ordre.	81
3.16	Localisation des trois cellules unitaires du bord avec une cinématique non périodique choisies pour comparer les différentes méthodes d'homogénéisation.	82
3.17	Résultat du déplacement du contour de la cellule unitaire $C1$ pour les quatre schéma d'homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.	83

3.18	Énergie dissipée lors de la déformation de la cellule unitaire $C1$ pour les quatre schémas d'homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.	84
3.19	Résultat du déplacement du contour de la cellule unitaire $C2$ pour les quatre schémas d'homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.	85
3.20	Énergie dissipée lors de la déformation de la cellule unitaire $C2$ pour les quatre schémas d'homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.	86
3.21	Résultat du déplacement du contour de la cellule unitaire $C3$ pour les quatre schémas d'homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.	87
3.22	Énergie dissipée lors de la déformation de la cellule unitaire $C3$ pour les quatre schémas d'homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.	88
4.1	Points représentant la surface de charge de la cellule sous les trois sollicitations expérimentales. Points donnés pour la déformation plastique scalaire (Von Mises) égale à 1.7% (points en rouge), 12.5% (points en noir) et 22.5% (points en magenta).	101
4.2	Points représentant la surface de charge de la cellule sous différentes sollicitations (trois expériences + sollicitations fictives). Points donnés pour la déformation plastique scalaire (Von Mises) égale à 1.7% (points en rouge), 12.5% (points en noir) et 22.5% (points en magenta). . . .	102
4.3	Évolution de la trace de la déformation plastique en fonction de la déformation plastique de Von Mises pour les trois orientations du réseau.	103
4.4	(a) Évolution du rapport du seuil de plasticité Σ_Y (Figure <i>a</i>), du paramètre L (Figure <i>b</i>) et du paramètre G (Figure <i>c</i>) en fonction de la déformation plastique de Von Mises.	106

4.5	(a) Évolution du seuil de plasticité Σ_Y en fonction de la déformation plastique de Von Mises; Évolution du paramètre L (b) et du paramètre G (c) en fonction du maximum de déformation plastique utilisé pour l'intervalle de déformation plastique (valeur égale à 7.5 , 10 , 12.5 , 15 ou 17.5 % de déformation plastique).	108
4.6	Points représentant la surface de charge de la cellule sous différentes sollicitations (trois expériences + sollicitations fictives). Points donnés pour la déformation plastique scalaire (Von Mises) égale à 1.7% (points en rouge), 12.5% (points en noir) et 22.5% (points en magenta).	109
4.7	Évolution du paramètre α en fonction de la déformation plastique de Von Mises.	110
4.8	Évolution du seuil de plasticité (a) et du paramètre α (b) en fonction de la déformation plastique de Von Mises.	111
4.9	Évolution du seuil de plasticité (a) et du paramètre α (b) en fonction de la déformation plastique de Von Mises.	112
4.10	Identification des paramètres de la loi d'écrouissage par l'algorithme de Nelder-Mead.	114
5.1	Schématisation de la géométrie et des conditions aux limites de l'éprouvette.	120
5.2	Courbe de l'effort en fonction du déplacement machine. Les points 1, 2 et 3 représentent les trois instants choisis pour regarder les champs de déformation calculés par DIC.	120
5.3	Visualisation du champ de déformation scalaire au sens de von Mises de la DIC microscopique aux trois instants choisis. Déformation longitudinale de la zone architecturée égale à 1.5% (a), 6.8% (b) et 9.6% (c).	121
5.4	Champ de déplacement longitudinal obtenue par X-DIC où la fissure est insérée <i>a posteriori</i> grâce à la connaissance de sa position.	122
5.5	Résidu en niveau de gris (pour une dynamique [0 255] de la corrélation d'images macroscopique avec introduction de la fissure (a) et de la corrélation d'images microscopique (b) avec une déformation moyenne de la ZOI égale à 24%.	123
5.6	Champ de déformation de von Mises de la cellule unitaire appartenant à la colonne de droite de la zone architecturée (troisième en partant du bas).	124
5.7	Visualisation de la déformation moyenne de von Mises dans les colonnes de la zone architecturée aux trois instants choisis.	125
5.8	Évolution de l'effort et de la déformation moyenne dans les colonnes (avec le maximum et minimum) à l'échelle microscopique en fonction de la déformation moyenne de la zone d'intérêt.	126
5.9	Champ construit sur la géométrie du matériau (a) et sinogramme de la transformée de Radon (b) de ce champ.	128

5.10	(a) Rapport entre le Sinogramme de la transformée de Radon du champ de déformation de von Mises et du champ construit sur la géométrie du matériau ; (b) Champ de déformation de la cellule unitaire sur lequel est tracé le support de la localisation.	129
5.11	Visualisation des lignes de localisation pour les cellules où la localisation s'est formée dans la configuration déformée.	129
5.12	Calcul du champ de déplacement <i>X-FEM</i> avec l'introduction d'une discontinuité. Avec les symboles + le déplacement normal mesuré par corrélation d'images, en \circ et ∇ la partie continue et discontinue du déplacement identifié.	132
5.13	Évolution des sauts de déplacements microscopique et macroscopique en fonction de la déformation moyenne de la zone architecturée. . . .	133
5.14	Carte de l'évolution de la déformation moyenne dans les lignes de la zone architecturée en fonction de la déformation moyenne de la ZOI. .	134
5.15	Visualisation de la zone de localisation pour les dix cellules unitaires situées le plus à gauche de la ligne horizontale centrale de trous. . . .	134
5.16	Visualisation du champ de déformations de von Mises de trois cellules unitaires localisées adjacentes et du support de la localisation calculé.	136
5.17	Visualisation des éprouvettes après déchirement de la zone architecturée : (a) 30 degrés et (b) 45 degrés d'inclinaison.	136
5.18	(a) Champ de déformation de von Mises de la sixième cellule unitaire de la ligne centrale en partant de la gauche. Le support de la localisation est tracé en magenta ; (b) Calcul du champ de déplacement <i>X-FEM</i> avec l'introduction d'une discontinuité deux images avant la fissuration de la zone architecturée. Avec les symboles + le déplacement normal, en \circ et ∇ la partie continue et discontinue du déplacement calculé.	137
5.19	Calcul du champ de déplacement <i>X-FEM</i> avec l'introduction d'une discontinuité deux images avant la fissuration de la zone architecturée. Projection sur l'axe vertical (a) et projection sur l'axe horizontal (b) du déplacement normal(symboles +), de la partie continue (symboles \circ) et discontinue du déplacement (symboles ∇) calculé. . .	138
5.20	Champ de déplacement longitudinal de la corrélation d'images étendue.	138
A.1	Principe de la méthode <i>FE²</i> avec un milieu macroscopique du second ordre.	145
A.2	Schéma représentant les paramètres utilisés pour les conditions aux limites périodiques de la cellule unitaire non déformée.	146
C.1	Définition des variables utilisées lors de la transformée de Radon . . .	156
C.2	Projection des pixels sur la droite coupant le champ étudié.	156
C.3	(a) Image exemple pour le calcul de la transformée de Radon ; (b) Sinogramme calculé	157

D.1	Fonction de Heaviside H (a), fonction d'enrichissement NH (b) et fonction d'enrichissement décalée $N(H - H(x_i))$ (c) pour une fissure placée entre les nœuds 2 et 3.	161
D.2	(a) Incertitude de déplacement pour un déplacement discontinu avec des éléments Q4 classiques et des éléments Q4 enrichis avec une discontinuité; (b) Incertitude de déplacement pour une fissure en mode I avec des éléments Q4 classiques, des éléments Q4 enrichis avec une discontinuité et des éléments Q4 enrichis avec une discontinuité et une singularité.	163
E.1	Dessin de définition de la plaque mince contenant la zone architecturée non inclinée.	166
E.2	Dessin de définition de la plaque mince contenant la zone architecturée simple (carré de 10x10 trous).	167

Liste des tableaux

1.1	Relations entre les échelles pour les trois familles de méthodes d'homogénéisation [BEL 08]	19
2.1	Détail des deux paramètres fixés pour l'étude de différentes géométries de la zone architecturée.	39
3.1	Écart de l'identification du polynôme de degré 3 du déplacement du contour de la cellule centrale par rapport au déplacement expérimental.	75
3.2	Écart du contour des deux schémas d'homogénéisation au résultat expérimental pour la cellule unitaire périodique idéale.	81
3.3	Écart du contour des quatre schémas d'homogénéisation au résultat expérimental pour la cellule unitaire $C1$	83
3.4	Écart du contour des quatre schémas d'homogénéisation au résultat expérimental pour la cellule unitaire $C2$	85
3.5	Écart du contour des quatre schémas d'homogénéisation au résultat expérimental pour la cellule unitaire $C3$	87
4.1	Valeurs homogénéisées des paramètres du comportement élastique par différentes méthodes.	98
4.2	Paramètres de la loi d'écrouissage identifié avec le critère de Hill puis avec le critère Drucker-Prager modifié.	114
5.1	Résidu moyen de la corrélation d'images en niveau de gris.	122
5.2	Moyenne et écart-type des paramètres de la position de la localisation pour les 51 cellules unitaires de la ligne centrale.	135

Introduction

Introduction

La plupart des matériaux fabriqués et utilisés dans l'industrie sont hétérogènes en deçà d'une échelle. Les alliages métalliques, les matériaux poreux, les composites ou les matériaux polycristallins en sont quelques exemples typiques. Les différentes phases et structures présentes dans ces matériaux en constituent la microstructure. La taille, la dimension, la géométrie, la distribution et les propriétés physiques de cette microstructure sont des critères parmi d'autres pour déterminer le comportement macroscopique de ces matériaux (à une échelle où ils peuvent paraître homogènes). Les outils de calcul (méthodes éléments finis, méthodes sans maillages, méthodes des éléments frontières...) pour obtenir la réponse de structures macroscopique contenant de tels matériaux amènent à des calculs très lourds en terme de temps de calcul et de ressources (toutes les hétérogénéités doivent être prises en compte).

Les méthodes multi-échelles ont alors été développées pour résoudre les problèmes de structures avec un temps de calcul un peu plus raisonnable. Ces méthodes sont en général validées par comparaison avec un calcul numérique plein champ. Certaines structures peuvent être validées expérimentalement par comparaison avec la réponse macroscopique d'un essai ou le suivi local des déformations grâce à des jauges. Des études *post-mortem* de l'échantillon peuvent être réalisées pour analyser la rupture de la microstructure.

Les méthodes de changement d'échelles s'appuient bien souvent sur une hypothèse de périodicité du matériau. On étudie le comportement d'une cellule périodique que l'on remplace par un matériau homogène équivalent. Ces théories sont courantes et bien maîtrisées en élasticité linéaire. Elles sont en plein développement dans le domaine non-linéaire en particulier dans le cas des grandes déformations où la microstructure peut évoluer. Les prévisions en cas de localisation par instabilité ou rupture restent aussi mal comprises.

Ce travail de thèse se veut comme un apport expérimental pour la validation des changements d'échelles dans les méthodes multi-échelles en élasticité, élasto-plasticité et rupture. Un matériau multi-échelle modèle a été créé et testé avec une caméra à très haute résolution (270 millions de pixels). Cette caméra permet de suivre simultanément l'évolution des déformations aux échelles microscopique

et macroscopique grâce à la méthode de corrélation d'images. L'orientation de la structure architecturée par rapport à un chargement uniaxial fixe permet de solliciter les cellules unitaires avec un chargement mixte (traction, cisaillement).

Le premier chapitre propose une étude bibliographique des méthodes multi-échelles pour le calcul de structures. Dans ce cadre, la théorie de l'homogénéisation élastique linéaire périodique est exposée ainsi que les méthodes d'homogénéisation non-linéaire basées sur le problème de l'inclusion d'Eshelby. La deuxième partie du chapitre présente les méthodes de résolution multi-échelles. La dernière partie du chapitre expose le principe de la corrélation d'images numériques utilisée pour calculer les champs de déplacements et déformations des essais aux échelles macroscopique et microscopique.

Le deuxième chapitre présente les résultats de corrélation d'images des structures architecturées modèle créées sur une plaque mince d'acier inoxydable. Les structures architecturées sont choisies grâce à un pré-dimensionnement numérique afin d'obtenir des sollicitations couplées (traction et cisaillement) sur les cellules unitaires.

Le troisième chapitre est une étude statistique de la cinématique des cellules unitaires. Les cellules unitaires ayant une cinématique périodique et celles ayant une cinématique non périodique sont déterminées. La deuxième partie du chapitre s'intéresse aux conditions aux limites à appliquer aux cellules unitaires à partir des gradients de déformations macroscopiques. Les conditions aux limites périodiques d'ordre supérieur sont notamment étudiées.

Le quatrième chapitre traite de l'homogénéisation des cellules unitaires ayant une cinématique périodique. La géométrie de la cellule unitaire introduit des symétries dans le comportement du milieu homogène équivalent (MHE). Les caractéristiques élastiques du MHE sont obtenues par homogénéisation à partir des résultats expérimentaux. Dans le domaine élasto-plastique, les critères de Hill et de Tsai-Hill sont identifiés à partir des résultats expérimentaux et de simulations numériques biaxiales.

Le dernier chapitre s'intéresse à la localisation des déformation dans les cellules unitaires qui conduit à la fissuration de la structure architecturée. Le support de la localisation est calculé à partir du champ des déformations mesuré par corrélation d'images à l'échelle microscopique. La cinématique de la cellule est enfin enrichie avec une discontinuité et le saut de déplacement normal à la localisation est identifié. Une comparaison avec le saut de déplacement calculé par corrélation d'images étendue à l'échelle macroscopique est menée afin de valider la stratégie d'identification à partir de l'échelle microscopique.

Chapitre 1

Etat de l'art

Ce premier chapitre met en lumière l'importance du choix des conditions aux limites microscopiques dans les problèmes multi-échelles. Dans les sections 1 et 2 sont présentées la théorie de l'homogénéisation linéaire classique puis plusieurs méthodes de calcul multi-échelles dans un cadre non-linéaire. Une éprouvette basée sur un motif hétérogène périodique a été créée afin d'évaluer la pertinence des conditions aux limites habituellement considérées grâce à la corrélation d'images numériques présentée dans la section 4.

Sommaire

1.1	L’homogénéisation micromécanique	5
1.1.1	Principe de l’homogénéisation micromécanique	5
1.1.2	Théorie de l’homogénéisation périodique élastique	9
1.1.3	Extension dans le cadre non-linéaire	12
1.1.4	Synthèse	17
1.2	Méthodes numériques multi-échelles	18
1.2.1	Méthodes concurrentes	19
1.2.2	Méthodes semi-concurrentes	20
1.3	Vers une obtention des champs de déplacements en surface	24
1.4	Corrélation d’images numérique	25
1.4.1	Principe de la conservation du flot optique	25
1.4.2	Corrélation d’images locale	26
1.4.3	Méthode globale	27
1.5	Synthèse	31

1.1 L'homogénéisation micromécanique

Pour tous les matériaux, il existe une échelle en deçà de laquelle, le matériau est hétérogène, c'est à dire que les caractéristiques matériaux ne sont pas les mêmes en tout point du matériau. C'est le cas par exemple pour les métaux où à l'échelle du grain les caractéristiques ne sont pas homogènes alors qu'à l'échelle macroscopique, les métaux sont considérés comme homogènes. Cependant si toutes les hétérogénéités sont prises en compte, le calcul d'une structure réelle devient rapidement très coûteux (en temps et en taille). L'étude de ces matériaux a fait naître l'homogénéisation micro-mécanique dans le but de remplacer les matériaux hétérogènes par des milieux homogènes équivalents (MHE) ayant des caractéristiques géométriques et mécaniques équivalentes.

Un exemple de matériau hétérogène est donné sur la figure 1.1 où la structure macroscopique est périodique, composée de la répétition d'une cellule unitaire de forme carrée avec un trou en son centre.

1.1.1 Principe de l'homogénéisation micromécanique

Le principe comporte trois étapes : la représentation, la localisation et l'homogénéisation. L'objectif est de remplacer un volume élémentaire représentatif (VER) par un milieu homogène équivalent. Le choix du volume représentatif peut se baser sur des approches statistiques dans le cas d'une microstructure aléatoire afin que deux volumes différents aient le même comportement effectif. Dans le cas d'une microstructure régulière, le motif de base du VER est fixé.

1.1.1.1 La représentation

Cette étape définit le volume élémentaire représentatif du matériau hétérogène considéré. Pour cela, il convient de définir la taille caractéristique des hétérogénéités, notée d , la taille du VER, notée l , de telle sorte que la condition $d \ll l$ soit vérifiée. Cette condition sert à donner à tous les points macroscopiques le même volume élémentaire sinon le comportement de la structure fluctuerait fortement d'un point

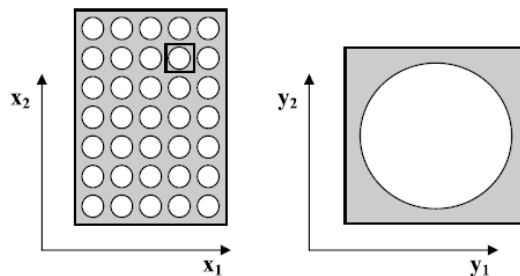


FIGURE 1.1 – Représentation d'un matériau à deux échelles.

à l'autre. La seconde condition à vérifier, en notant L la dimension caractéristique de la structure globale, est que $l \ll L$ de manière à traiter la structure comme un milieu homogène.

1.1.1.2 La localisation

Cette étape consiste à faire descendre les informations macroscopiques (contraintes, déformations, ...) d'un point X de la structure Ω vers un point x du volume élémentaire représentatif noté ω . Le VER étant défini, il reste à calculer les champs de déformations ou de contraintes locales en localisant les champs macroscopiques (E^0 ou Σ^0). Le tenseur de localisation des déformations \mathbf{A} et le tenseur de concentration des contraintes \mathbf{B} sont des tenseurs d'ordre 4 ayant une moyenne sur le VER égale au tenseur identité, c'est à dire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{A} : \mathbf{E}^0(X), \quad \text{où} \quad \langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{Id} \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbf{B} : \Sigma^0(X), \quad \text{où} \quad \langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{Id} \quad (1.2)$$

où $\langle . \rangle$ désigne l'opérateur d'homogénéisation, défini par l'Équation 1.7, *i.e.* l'obtention en moyenne de la valeur microscopique sur le RVE.

1.1.1.3 Les conditions aux limites

Les sollicitations auxquelles est soumis le VER peuvent être prélevées au point macroscopique considéré de la structure. Entre les grandeurs macroscopiques (déformations, contraintes, ...) et les champs locaux à déterminer ne peuvent être établis que des relations de moyenne. Nous n'aurions donc à résoudre qu'un problème sans véritable conditions à la limite, mais soumise à des sollicitations en moyenne. A ce problème mal posé, nous préférons substituer un problème avec des conditions aux limites plus classique en adoptant des conditions homogènes sur le contour, que nous pouvons scinder en trois familles :

- Conditions de déformation homogène sur le contour (KUBC) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x} \quad \text{sur } \partial\omega \quad (1.3)$$

- Conditions de contrainte homogène sur le contour (SUBC) :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \Sigma^0 \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\omega \quad (1.4)$$

- Conditions aux limites périodiques (PUBC) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad \text{sur } \partial\omega \quad (1.5)$$

où \mathbf{n} représente un vecteur normal à la frontière et \mathbf{v} désigne un champ inconnu du problème local soumis à des conditions de périodicité sur $\partial\omega$. La dernière famille est l'application de conditions aux limites périodiques homogènes sur le contour. Les

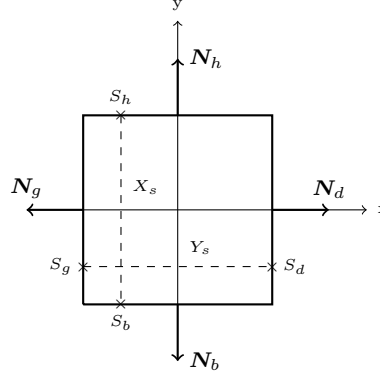


FIGURE 1.2 – Schématisation des conditions de périodicité haut/bas et gauche/droite.

conditions de périodicité sur le bord $\partial\omega$ sont représentées sur la figure 1.2, elles s'écrivent pour un VER rectangulaire :

$$\mathbf{v}(s_h) = \mathbf{v}(s_b) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}(s_d) = \mathbf{v}(s_g), \quad (1.6)$$

où les indices h, b, d et g font respectivement référence aux quatre bords de la cellule haut, bas, droite et gauche. Il s'ajoute évidemment la condition d'anti-périodicité des vecteurs contraintes correspondants. Le choix des conditions aux limites fait partie de l'étape de *localisation* de par la descente d'informations macroscopiques vers l'échelle microscopique.

Dans un matériau hétérogène tel que représenté sur la Figure 1.1, les cellules unitaires placées au centre sont entourées d'autres cellules unitaires ayant le même comportement. Sur ces cellules unitaires peuvent être appliquées des conditions aux limites périodiques. Alors que pour les cellules unitaires proches du bord -encore plus celles au bord-, les conditions aux limites périodiques ne sont plus pertinentes puisque ces cellules n'ont plus une cinématique périodique.

1.1.1.4 L'homogénéisation

Le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique se fait par l'étape d'homogénéisation. Définissons les tenseurs de déformation et de contrainte macroscopique \mathbf{E} et $\mathbf{\Sigma}$, ils sont égaux à :

$$\mathbf{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} d\omega, \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\omega} \boldsymbol{\varepsilon} d\omega \quad (1.7)$$

où V est le volume de la cellule unitaire (dans un cadre où le VER est de dimension 2) et $\langle \cdot \rangle$ désigne l'opérateur d'homogénéisation. Ainsi pour les conditions aux limites précédentes, la valeur macroscopique du tenseur appliqué pour les conditions aux limites est égale à ce tenseur. Prenons par exemple le cas des conditions aux limites

périodiques, le tenseur de déformation macroscopique après application du théorème de Green-Ostogradsky est égale à :

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2V} \int_{\partial\omega} (E_{ik}^0 x_k n_j + E_{jk}^0 x_k n_i) dl + \frac{1}{2V} \int_{\partial\omega} (v_{,i} n_j + v_{,j} n_i) dl \\ E_{ij} &= E_{ij}^0 + \frac{1}{2V} \int_{\partial\omega} (v_{,i} n_j + v_{,j} n_i) dl \\ E_{ij} &= E_{ij}^0 \quad (\text{car } \mathbf{v} \text{ est périodique sur le bord}) \end{aligned} \tag{1.8}$$

De même, les tenseurs entre ces deux échelles satisfont au Lemme de Hill qui stipule que l'énergie est conservée entre les deux échelles :

$$\Sigma : \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \tag{1.9}$$

Le comportement effectif du matériau homogénéisé, \mathbf{C}_{eff} , ou la souplesse effective, \mathbf{S}_{eff} sont ainsi donnés par la relation entre ces tenseurs :

$$\Sigma = \mathbf{C}_{eff} : \mathbf{E}^0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \mathbf{S}_{eff} : \Sigma^0 \tag{1.10}$$

Différents modèles micromécaniques ont été proposés pour la prédiction du comportement effectif des matériaux hétérogènes. Leur spécificité réside dans les hypothèses émises pour la prise en compte des interactions entre les différentes phases et l'application des conditions aux limites. Nous allons présenter brièvement les deux bornes de Voigt et Reuss qui encadrent le comportement effectif homogénéisé pour tout type de matériau hétérogène.

1.1.1.5 Bornes de Voigt et Reuss

Borne de Voigt : Voigt propose une approximation des modules effectifs par une loi de mélange des modules des différentes phases constitutives du milieu microscopique. En considérant que les déformations sont uniformes en tout point, le tenseur d'élasticité effectif, \mathbf{C}_V est égal à la moyenne du tenseur d'élasticité microscopique, c'est à dire :

$$\mathbf{C}_V = \sum_{r=1}^N f_r \cdot \mathbf{C}_r, \tag{1.11}$$

où f_r et \mathbf{C}_r sont respectivement la fraction volumique et le tenseur d'élasticité de chaque phase r .

Borne de Reuss : Cette borne résulte d'une approximation duale à celle proposée par Voigt. Dans l'hypothèse que les contraintes sont uniformes en tout point, le tenseur de souplesse élastique effectif, \mathbf{S}_R est égal à la moyenne du tenseur de souplesse élastique microscopique, c'est à dire :

$$\mathbf{S}_R = \sum_{r=1}^N f_r \cdot \mathbf{S}_r, \tag{1.12}$$

où \mathbf{S}_r est le tenseur de souplesse élastique de chaque phase (égal à \mathbf{C}_r^{-1}). Ces bornes encadrent le module de compressibilité du tenseur d'élasticité effectif réel tel que :

$$K_R \leq K_{eff} \leq K_V, \quad (1.13)$$

où K_R , K_V et K_{eff} sont respectivement le module de compressibilité élastique calculé par la borne de Reuss et Voigt et le module de compressibilité effectif du milieu homogène équivalent. Ces deux bornes sont également appelés fuseau de Hill. D'autres bornes ont été proposés par la suite pour approximer plus précisément le tenseur d'élasticité effectif comme celles d'Hashin et Shtrikman [HAS 63] par exemple.

1.1.2 Théorie de l'homogénéisation périodique élastique

La théorie de l'homogénéisation par analyse asymptotique [SAN 88] propose une approche multi-échelle mettant en jeu un problème à chaque échelle qui permet de remonter aux propriétés locales. Cette théorie s'applique dans le cadre de propriétés matériaux élastiques et d'une répétition périodique du VER considéré. L'idée consiste à introduire une variable spatiale par échelle pour décrire la solution : une variable \mathbf{X} liée à l'échelle macroscopique (celle de la structure) et une variable \mathbf{y} à l'intérieur du VER. En notant le rapport d'échelles ϵ , on peut définir la variable $\mathbf{Y}(= \mathbf{y}/\epsilon)$ comparable en amplitude à \mathbf{X} . Le déplacement solution est alors développé asymptotiquement en fonction de ϵ (plus le changement d'échelle est grand, plus ϵ est petit) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}, \mathbf{y}) + \epsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{X}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 \mathbf{u}_2(\mathbf{X}, \mathbf{y}) + o(\epsilon^2). \quad (1.14)$$

La seconde étape consiste à développer les équations d'équilibre et à trier les termes suivant la puissance du paramètre ϵ . Pour cela, on commence par écrire le tenseur des déformations au point M (tel que $\mathbf{OM} = \mathbf{X} + \mathbf{y}$) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}^T \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{Y}}^T \right) \right], \quad (1.15)$$

soit en triant en fonction des puissances du paramètre ϵ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \epsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\boldsymbol{\varepsilon}_X(\mathbf{u}_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_{i+1})). \quad (1.16)$$

L'équation d'équilibre s'écrit quant à elle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d &= \mathbf{0} \\ \nabla_X(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) + \epsilon^{-1} \nabla_Y(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{f}_d &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

où \mathbf{f}_d est une force volumique et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ suit la relation de comportement $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}$. L'opérateur de Hooke, \mathbf{K} , ne dépend que de la variable microscopique \mathbf{y} comme le comportement de la microstructure est supposé périodique.

En développant l'équation (1.17) suivant les puissances du paramètre ϵ , on obtient :

$$\begin{cases} \epsilon^{-2} \left[\nabla_Y(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_0)) \right] + \\ \epsilon^{-1} \left[\nabla_X(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_0)) + \nabla_Y(\mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_X(\mathbf{u}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_1))) \right] + \\ \epsilon^0 \left[\nabla_X(\mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_X(\mathbf{u}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_1))) + \nabla_Y(\mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_X(\mathbf{u}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_2))) + \mathbf{f}_d \right] + \dots = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Parmi les champs de déplacements solutions, le terme \mathbf{u}_0 correspond au champ macroscopique alors que \mathbf{u}_1 correspond au champ microscopique. Pour chaque ordre du paramètre ϵ , on peut écrire un problème, en partant de l'ordre -2 à l'ordre 0 :

- **Problème en ϵ^{-2}** : l'équation (1.19) permet de montrer que \mathbf{u}_0 est indépendant de la variable microscopique et ne dépend que de la variable macroscopique \mathbf{X} :

$$\nabla_Y(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_0)) = 0 \implies \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) = \boldsymbol{\varepsilon}_X(\mathbf{u}_0) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (1.19)$$

- **Problème en ϵ^{-1}** : comme le terme en \mathbf{u}_0 est indépendant par rapport à \mathbf{y} , le problème s'écrit :

$$\nabla_Y(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_0) = -\nabla_Y(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_1)). \quad (1.20)$$

On peut montrer que ce problème admet une unique solution. Ainsi il est possible de trouver un tenseur $\mathbf{H}(\mathbf{y})$, défini sur ω , vérifiant les conditions de périodicité sur le contour tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_1) = \mathbf{H}(\mathbf{y})\boldsymbol{\varepsilon}_0. \quad (1.21)$$

Ce tenseur est appelé tenseur de localisation des déformations et est généralement déterminé par une série de déformations macroscopiques élémentaires. En notant la déformation microscopique $\boldsymbol{\varepsilon}^m = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_Y(\mathbf{u}_1)$, on obtient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^m = (\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{H})\boldsymbol{\varepsilon}_0. \quad (1.22)$$

- **Problème en ϵ^0** : la condition d'existence du problème en \mathbf{u}_2 conduit à écrire :

$$\int_{\omega} [\nabla_X(\boldsymbol{\sigma}^m) + \mathbf{f}_d] d\omega + \int_{\omega} \nabla_X(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_X(\mathbf{u}_1)) d\omega = \mathbf{0}. \quad (1.23)$$

On remarque que le second membre de la partie gauche de l'équation (1.23) est nul en utilisant le théorème de Green-Ostogradsky pour se ramener à une intégrale de contour avec un champ périodique. L'équation (1.23) s'écrit finalement :

$$\nabla_X \boldsymbol{\Sigma} + \langle \mathbf{f}_d \rangle = \mathbf{0}, \quad (1.24)$$

ce qui donne le problème macroscopique portant sur les quantités homogénéisées $\boldsymbol{\Sigma}$, \mathbf{E} . Le comportement homogénéisé est obtenu par :

$$\mathbf{C}_{per} = \langle \mathbf{C} + \mathbf{C} : \mathbf{H} \rangle. \quad (1.25)$$

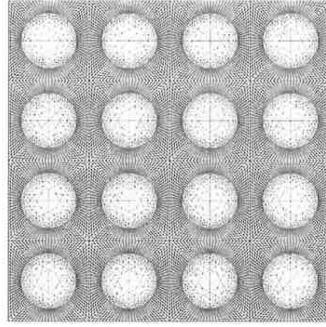


FIGURE 1.3 – Maillage d'un quart de section du VER. Contient $(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2})$ fibres.

Comparaison des différentes estimations du comportement effectif : Il est possible de montrer que le comportement effectif calculé grâce aux conditions aux limites périodiques est bien encadré par les bornes de Voigt et Reuss :

$$C_R \leq C_{per} \leq C_V. \quad (1.26)$$

Ce comportement homogénéisé reflète mieux le comportement effectif du matériau homogène équivalent. Le choix des conditions aux limites sur le VER est crucial pour l'estimation du comportement effectif. Il peut être montré que lorsque la taille du VER est augmentée, l'encadrement du comportement effectif par les bornes de Voigt et Reuss devient plus précis jusqu'à prédiction du même comportement équivalent [KAN 03, BOR 01]. Cette analyse a par exemple été menée sur un composite à matrice aluminium renforcée par des fibres de carbure [BOR 01] représenté sur la Figure 1.3. Les deux matériaux constitutifs sont considérés élastiques homogènes isotropes avec des modules de Young peu différents, les bornes de Voigt et Reuss convergent vers le comportement effectif avec l'agrandissement du VER comme le montre la Figure 1.4. Il peut être noté que l'estimation par les conditions aux limites périodiques ne varie pas en fonction de la taille du VER.

Bilan : Les approches asymptotiques fournissent les propriétés effectives ainsi que les champs locaux comme les déformations et les contraintes grâce à la résolution de deux problèmes couplés. Toutefois, ces approches reposent sur plusieurs hypothèses fortes : un changement d'échelle très grand pour justifier l'utilisation d'un développement asymptotique et la périodicité. Cette dernière n'est pas justifiée au bord de la structure ou lors de forts gradients de déformations par exemple. De plus, le comportement des différents constituants est supposé linéaire élastique. Ces méthodes sont souvent limitées à des modèles simples de matériaux dans le cas des petites déformations. Dans la partie suivante sont détaillées certaines techniques d'homogénéisation permettant d'obtenir un milieu homogène équivalent dans un cadre non-linéaire.

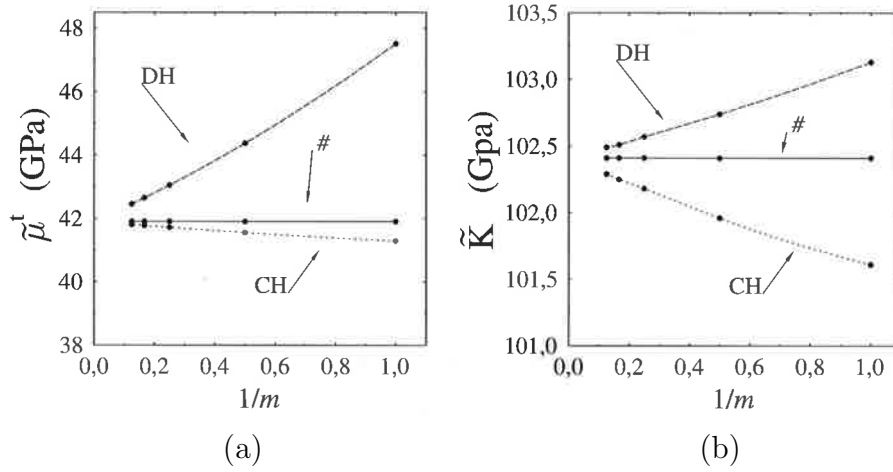


FIGURE 1.4 – Variation du module de Young (a) et du coefficient de Poisson (b) en fonction de la taille du VER (m étant le nombre de cellules par côté). DH est la condition de déformation homogène, CH en contrainte homogène et # avec des conditions aux limites périodiques [BOR 01].

1.1.3 Extension dans le cadre non-linéaire

Parmi les extensions de la théorie classique de l'homogénéisation au cadre non-linéaire ont été proposées les approches dites par champs moyens. L'idée est de remplacer le problème de localisation dans le milieu hétérogène par un problème avec une distribution des champs plus uniformes que la distribution réelle (généralement homogène par phase). Ces approches reposent sur la résolution du problème de l'hétérogénéité élastique, dit d'Eshelby [ESH 57].

1.1.3.1 L'inclusion d'Eshelby

Soit un milieu homogène, de comportement élastique linéaire homogène de tenseur \mathbf{C}_o occupant un domaine V . Le matériau est supposé à l'état naturel sauf dans une inclusion I , de très petite taille devant V , de forme ellipsoïdale où le matériau subit une transformation physique pouvant se mettre sous la forme d'une déformation libre uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}_L$. Le tenseur d'Eshelby \mathbf{S}^E , qui dépend du comportement de la matrice et de la forme de l'inclusion, relie la déformation dans l'inclusion $\boldsymbol{\varepsilon}_I$ à la déformation libre par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = \mathbf{S}^E : \boldsymbol{\varepsilon}_L. \quad (1.27)$$

La contrainte dans l'inclusion soumise à la déformation libre et à la déformation de l'inclusion s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\sigma}_I = \mathbf{C}_o : \boldsymbol{\varepsilon}_I - \mathbf{C}_o : \mathbf{S}^{E^{-1}} : \boldsymbol{\varepsilon}_I. \quad (1.28)$$

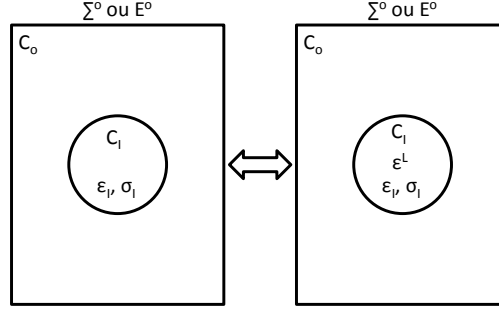


FIGURE 1.5 – Représentation du problème d'Eshelby : à gauche, une inclusion de comportement \mathbf{C}_I noyée dans une matrice de comportement \mathbf{C}_o soumise à une déformation ou une contrainte macroscopique. A droite, le problème équivalent avec une inclusion de comportement \mathbf{C}_o soumise à une déformation libre $\boldsymbol{\varepsilon}^L$.

La solution du problème de l'inclusion peut être étendue au cas où le milieu est soumis à un état de déformation \mathbf{E}^0 ou de contrainte $\boldsymbol{\Sigma}^0$ macroscopique homogènes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = \mathbf{E}^0 + ((\mathbf{S}^E)^{-1} - \mathbf{Id}) : \boldsymbol{\varepsilon}_I, \quad (1.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_I = \boldsymbol{\Sigma}^0 - \mathbf{C}_o : ((\mathbf{S}^E)^{-1} - \mathbf{Id}) : \boldsymbol{\varepsilon}_I. \quad (1.30)$$

En injectant l'expression de $\boldsymbol{\varepsilon}_I$ dans la seconde expression, la loi d'interaction est obtenue :

$$\boldsymbol{\sigma}_I - \boldsymbol{\Sigma}^0 = -\mathbf{C}^* : (\boldsymbol{\varepsilon}_I - \mathbf{E}^0), \quad (1.31)$$

où \mathbf{C}^* est le tenseur de Hill :

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_o : ((\mathbf{S}^E)^{-1} - \mathbf{Id}) \quad (1.32)$$

En intégrant le comportement de l'inclusion ($\boldsymbol{\sigma}_I = \mathbf{C}_I : \boldsymbol{\varepsilon}_I$) dans l'équation de la loi d'interaction (1.31), le tenseur de localisation de la déformation s'écrit :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{C}_I + \mathbf{C}_o)^{-1} : (\mathbf{C}_o + \mathbf{C}^*). \quad (1.33)$$

A partir de la résolution du problème de l'inclusion, plusieurs schémas d'homogénéisation ont été proposés pour prendre en compte les hétérogénéités dans la microstructure.

Schéma des distributions diluées : le matériau est constitué d'une matrice (phase 1) entourant des hétérogénéités (phases de 2 à N) dont le comportement est homogène. Ce schéma considère que les fractions volumiques des inclusions sont suffisamment faibles pour négliger les interactions entre elles. Il ne reste donc qu'à appliquer le résultat du problème d'Eshelby (1.33) à chaque inclusion et le comportement effectif, \mathbf{C}^{DD} , s'écrit donc :

$$\mathbf{C}^{DD} = \mathbf{C}_o + \sum_{r=2}^N f_r (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_o) : (\mathbf{C}_r + \mathbf{C}_o)^{-1} : (\mathbf{C}_o + \mathbf{C}_r^*). \quad (1.34)$$

Ce schéma ne prend donc pas en compte les interactions entre les inclusions et se limite donc seulement à de très petites inclusions. Il peut être montré que si la fraction volumique de l'inclusion dépasse 0.5 alors le comportement équivalent n'est plus contenu dans le fuseau de Hill.

Schéma de Mori-Tanaka [MOR 73] : pour tenir compte des interactions entre les inclusions, on utilise le schéma de Mori-Tanaka. Le principe est de considérer les inclusions isolées dans une matrice infinie soumise à une déformation moyenne $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ inconnue. La déformation de chaque inclusion est alors reliée à la déformation moyenne par des pseudo-tenseurs de localisation solution \boldsymbol{T}_I du problème d'Eshelby :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = \boldsymbol{T}_I : \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{T}_I = (\boldsymbol{Id} + \boldsymbol{S}_I^E : \boldsymbol{C}_o^{-1} : (\boldsymbol{C}_I - \boldsymbol{C}_o))^{-1}. \quad (1.35)$$

Le tenseur de localisation de chaque phase s'écrit alors :

$$\boldsymbol{A}_I = \boldsymbol{T}_I : \left(\sum_{j=1}^N f_j \boldsymbol{T}_j \right)^{-1}, \quad (1.36)$$

et le tenseur du comportement effectif, \boldsymbol{C}^{MT} , est égal à :

$$\boldsymbol{C}^{MT} = \boldsymbol{C}_o + \sum_{i=1}^N f_i (\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}_o) : \boldsymbol{T}_i : \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N f_j \boldsymbol{T}_j \right)^{-1}. \quad (1.37)$$

Le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka prend en compte les interactions entre les inclusions. Par rapport au schéma des distributions diluées, les inclusions peuvent avoir des tailles plus importantes (fraction volumique allant jusqu'à 0.25 ou 0.30).

Schéma auto-cohérent : dans ce cas, on suppose que chaque inclusion est entourée par le milieu continu équivalent, dont le comportement effectif \boldsymbol{C}^{AC} est inconnu, au lieu de la matrice. Ainsi le tenseur de localisation des déformations est égal à :

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}_I + \boldsymbol{C}^{AC})^{-1} : (\boldsymbol{C}^{AC} + \boldsymbol{C}^{AC*}). \quad (1.38)$$

Le comportement effectif, \boldsymbol{C}^{AC} , s'écrit donc de manière implicite comme :

$$\boldsymbol{C}^{AC} = \sum_{r=1}^N f_r \boldsymbol{C}_r : (\boldsymbol{C}_I + \boldsymbol{C}^{AC})^{-1} : (\boldsymbol{C}^{AC} + \boldsymbol{C}^{AC*}). \quad (1.39)$$

Le calcul du comportement effectif se fait de manière numérique. Avec cette approche, les résultats obtenus sont plus précis qu'avec les approches précédentes. Cependant il apparaît compliqué d'explicitier le comportement dans des cas généraux à partir de cette équation.

1.1.3.2 Le milieu linéaire de comparaison (MLC)

Le résultat de l'inclusion d'Eshelby a permis une extension de ces modèles à l'élasto-plasticité, la visco-élasticité ou la visco-élasto-plasticité. Les premiers modèles ont été développés dans le cadre de la plasticité polycristalline. Les schémas d'homogénéisation explicités dans la section précédente se prêtent au calcul des propriétés effectives dans un cadre non-linéaire. L'idée, développée par Ponte Castañeda [PON 91], consiste à figer provisoirement la structure pour lui affecter des caractéristiques linéarisées afin de poser le problème de son homogénéisation désormais linéaire. Ainsi, un premier choix à faire est la linéarisation du problème non-linéaire : en effet, plusieurs critères de linéarisation sont possibles : une formulation incrémentale, sécante, tangente ou affine par exemple. Le second choix est la description des caractéristiques linéarisées des phases. Faut-il les garder uniformes ou non-uniformes à l'intérieur des phases ?

Une fois ces deux choix effectués, la résolution du problème non-linéaire d'homogénéisation est faite à partir de la résolution d'un problème linéaire. Dans la suite, nous présentons deux des modèles les plus connus certes plus anciens que l'introduction du MLC mais entrant parfaitement dans ce cadre, le modèle de Kröner [ZAO 01] et celui de Hill [HIL 65].

Le modèle de Kröner : Ce modèle a étendu le schéma auto-cohérent au domaine élasto-plastique dans le cadre des polycristaux. L'idée est de supposer que chaque cristal se comporte comme une inclusion ellipsoïdale et d'assimiler la matrice au milieu homogène équivalent plastifié. Ainsi Kröner choisit de linéariser de façon incrémentale les modules effectifs et de les utiliser dans le schéma auto-cohérent comme des déformations libres. La solution classique d'Eshelby donne la loi d'interaction sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_I - \boldsymbol{\Sigma}^o = -\mathbf{C} : (\mathbf{Id} - \mathbf{S}^E) : (\boldsymbol{\varepsilon}_i^p - \mathbf{E}^p), \quad (1.40)$$

où \mathbf{E}^p est la déformation libre imposée à la matrice et $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ la déformation libre imposée à la phase. Dans le cas où les inclusions sont considérées sphériques et la déformation plastique incompressible :

$$\boldsymbol{\sigma}_I - \boldsymbol{\Sigma}^o = -2\mu(1 - \beta)(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{E}^p) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{2(4 - 5\nu)}{15(1 - \nu)}, \quad (1.41)$$

où μ est le module de cisaillement isotrope et ν le coefficient de Poisson. Il peut être remarqué que la déformation plastique est traitée en fait comme une déformation libre. Ainsi le comportement trouvé sera bien élasto-plastique mais il aura été effectué dans un contexte d'élasticité linéaire. Le modèle fournit une estimation trop raide du comportement effectif.

Le modèle de Hill : Pour palier à ce dernier problème, Hill propose de résoudre le problème en linéarisant la loi d'écoulement :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i = \mathbf{L}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i, \quad (1.42)$$

où \mathbf{L} est le module tangent correspondant à l'état de déformation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$. Cette loi est dite *multi-branche* car elle dépend de l'état actuel du matériau mais surtout du type de chargement (deux expressions différentes que le matériau soit en charge ou décharge plastique). Il reste à adopter une formulation incrémentale pour traiter à chaque pas un problème d'homogénéisation linéaire. La vitesse de contrainte macroscopique $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ est définie en fonction de la vitesse de déformation macroscopique $\dot{\mathbf{E}}$ par :

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \langle \mathbf{L}_i : \mathbf{A}_i \rangle : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{L}_{eff} : \dot{\mathbf{E}}, \quad (1.43)$$

où \mathbf{L}_{eff} est le module tangent effectif. La résolution du problème se fait par un schéma auto-cohérent et l'approche incrémentale aboutit à la loi d'interaction suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i - \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = -\mathbf{L}^* : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i - \dot{\mathbf{E}}^p) \quad \text{avec} \quad \mathbf{L}^* = \mathbf{L}_{eff} : ((\mathbf{S}^E)^{-1} - \mathbf{Id}). \quad (1.44)$$

où \mathbf{L}^* est le tenseur de Hill dans le cadre du schéma auto-cohérent. L'approche de Hill reste pour autant une approximation, en affectant à la matrice les modules instantanées uniformes alors que la matrice subit la présence de l'inclusion et que donc au moins dans son voisinage, les modules devraient être non uniformes.

Beaucoup de formulations ou de choix de linéarisations ont été développés par la suite. Nous pouvons citer par exemple la formulation sécante développée par Hutchinson qui étend la formule incrémentale de Hill au cas de la viscoplasticité [HUT 76] ou des approches reposants sur une formulation affine [MAS 00, ZAO 00]. L'inconvénient des approches à champs moyens réside dans le fait que les champs microscopiques présentent de fortes hétérogénéités en particulier au sein d'une même phase.

1.1.3.3 L'analyse par champs de transformation (TFA et NTFA)

L'analyse par champs de transformation (TFA) [DVO 76, DVO 87] propose un formalisme permettant de généraliser l'écriture des relations de localisation dans le domaine non-linéaire. Ce choix permet de prendre en compte la variation des champs locaux de manière plus riche que les approches par champs moyens. L'idée de la méthode est de supposer que le champ de déformation macroscopique est distribué de manière purement élastique à l'échelle microscopique. Les déformations inélastiques sont vues comme des champs locaux de déformation libre. La cellule microscopique est donc décomposée en sous-volumes où les champs inélastiques μ sont supposés uniformes. Les déformations et contraintes s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} : \mathbf{E}_{el} + \sum_{j=1}^m \mathbf{D}_j : \mu_j, \quad (1.45)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B} : \boldsymbol{\Sigma}_{el} + \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_j : \mathbf{C} : \mu_j, \quad (1.46)$$

où les tenseurs \mathbf{A} et \mathbf{B} correspondent aux tenseurs de localisation de l'élasticité linéaire et les tenseurs \mathbf{D} et \mathbf{F} aux tenseurs d'influence de la déformation inélastique du sous-volume j . Les tenseurs de localisation peuvent être calculés numériquement par résolution d'une série de problèmes élastiques élémentaires en imposant des champs inélastiques nuls. *A contrario*, les tenseurs d'influences sont eux calculés en imposant des déformations inélastiques élémentaires et des champs élastiques nuls. La TFA permet donc de prendre en compte la variation des champs locaux par sous-volume qui peuvent ne pas être coïncidents avec les phases du matériau hétérogène. Pour que la méthode donne de bons résultats, le nombre de sous-volumes doit être important. Même dans ce cas, la TFA prédit un comportement trop rigide de la microstructure. Pour palier à ce déficit, l'analyse par champs de transformation non-uniformes (NTFA) a été développée.

L'idée de la NTFA [MIC 03, MIC 04] consiste à décomposer les déformations inélastiques sur une base de fonction non-uniformes sur les sous-volumes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{in}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\mu}_j \boldsymbol{\theta}_j(\mathbf{x}). \quad (1.47)$$

Les fonctions $\boldsymbol{\theta}$ sont appelées modes plastiques et sont définies par l'utilisateur. Le support des ces fonctions peut aussi s'étendre à plusieurs sous-volumes. Le choix de ces modes plastiques constitue la principale difficulté de cette méthode. Les modes plastiques sont pré-déterminés suivant l'intensité des niveaux de déformation et de leur triaxialité.

Bilan et limitations : La méthode NTFA exploite une décomposition des champs microscopiques inélastiques sur un ensemble de modes empiriques non uniformes. Les modes plastiques sont déterminés par des calculs préliminaires (par exemple avec des éléments finis) sur la microstructure selon des trajets de chargement à la fois en déformation et en contrainte. Cela implique que l'utilisateur a une idée de la triaxialité et de l'intensité du chargement puisque le résultat dépend entièrement de la détermination des modes plastiques.

1.1.4 Synthèse

Les méthodes d'homogénéisation présentées dans cette section permettent de remplacer le volume élémentaire représentatif de la microstructure par un milieu homogène équivalent ayant les mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques. Ces méthodes prédisent assez bien le comportement linéaire élastique de la microstructure. Dans un cadre non-linéaire, les méthodes développées s'appuient sur une linéarisation du comportement afin d'appliquer les schémas classiques de l'homogénéisation linéaire. La notion de milieu hétérogène de comparaison linéaire est introduite pour définir la formulation de linéarisation du comportement non-linéaire. Bien que les différentes estimations et bornes analytiques du comportement effectif

soient très nombreuses, les résultats sont soumis à des hypothèses de calculs restrictives et ne sont pas suffisants pour mener le calcul d'une structure constituée de matériaux non-linéaires, avec des hétérogénéités complexes ou des chargements arbitraires. C'est pourquoi grâce à la puissance des outils numérique actuels, les méthodes multi-échelles numériques ont été développées pour palier aux restrictions inhérentes aux méthodes analytiques d'homogénéisation. Dans la section suivante, 1.2, différentes méthodes multi-échelles numériques sont présentées dans un cadre non-linéaire.

1.2 Méthodes numériques multi-échelles

L'objectif de cette partie est de présenter différentes méthodes multi-échelles numériques permettant de réaliser un changement d'échelle sans chercher à identifier le comportement non-linéaire effectif de la microstructure. La démarche de ces méthodes est de mettre en place un problème macroscopique lié à la structure et un problème microscopique associé à l'hétérogénéité. La principale difficulté réside dans la manière de séparer les deux échelles pour mieux les coupler. Pour présenter ces méthodes, nous les avons classées en trois catégories suivant la manière dont sont transférés les champs mécaniques entre les échelles. Les transferts sont répertoriés dans la Table 1.1 et les différentes catégories sont explicitées ci-après :

- **Méthodes hiérarchiques** : les méthodes hiérarchiques font passer l'information du modèle microscopique vers le modèle macroscopique quand celui-ci en a besoin. En effet, les réponses microscopiques - en terme de tenseur de déformations et de contraintes - sont pré-calculées à partir d'un choix de chargement. Les champs mécaniques de sortie homogénéisés sont ainsi conservés comme une base de données pour alimenter le modèle macroscopique. Ces méthodes ont été détaillées dans la section précédente 1.1 dans un cadre linéaire et non-linéaire.
- **Méthodes concurrentes** : pour ces méthodes, les modèles macroscopiques et microscopiques sont cette fois couplés de manière forte, c'est-à-dire que les équations d'équilibre et de compatibilité sont imposées à l'interface des deux modèles ce qui implique une résolution simultanée des modèles.
- **Méthodes semi-concurrentes** : Les méthodes semi-concurrentes se situent entre ces deux classes de méthodes. Le modèle à l'échelle microscopique est calculé pour un incrément spécifique venant de l'échelle macroscopique. Les informations homogénéisées remontent vers l'échelle macroscopique où sont imposées les conditions d'équilibre. Les milieux macroscopiques et microscopique échangent de manière faible jusqu'à obtention de la solution adéquate.

Méthode multi-échelle	Transfert d'information	Condition d'interface
Hiérarchique	$\Omega_{micro} \rightarrow \Omega_{macro}$	
Semi-concurrente	$\Omega_{micro} \leftrightarrow \Omega_{macro}$	
Concurrente	$\Omega_{micro} \Leftrightarrow \Omega_{macro}$	Équations d'équilibre

TABLE 1.1 – Relations entre les échelles pour les trois familles de méthodes d'homogénéisation [BEL 08]

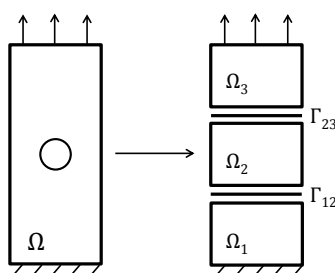


FIGURE 1.6 – Schématisation de la décomposition de domaine d'une plaque trouée en traction.

1.2.1 Méthodes concurrentes

1.2.1.1 Décomposition de domaines

Les méthodes de décomposition de domaines [FAR 91, LAD 99] permettent la division d'un problème en sous-problèmes pour introduire le calcul parallèle entre ces différents sous-domaines. Les différentes étapes de ces méthodes se classent comme suit :

- un *découpeur* décompose le maillage en sous-domaines ou crée des sous-domaines, comme illustré sur la figure 1.6.
- Les différents sous-modèles sont résolus en parallèle avec des conditions aux limites définies sur l'interface.
- Une vérification des conditions de continuité aux interfaces est imposée (approche en déplacement, en effort ou mixte).
- Un algorithme itératif pour résoudre un problème grossier avec les interfaces et propager les conditions de continuité aux sous-domaines.

Bilan et limitations : Cette méthode permet de rendre un calcul avec un très grand nombre de libertés (il faut mailler toutes les hétérogénéités) réalisable par parallélisation. En effet, chaque sous-domaine est résolu séparément avant une vérification partielle ou totale des conditions de continuité aux interfaces des sous-domaines. Cette approche est multi-échelle au sens numérique mais ignore complètement la microstructure du matériau hétérogène.

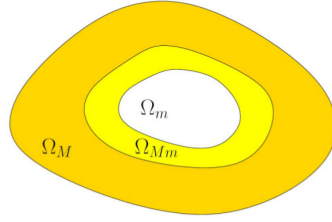


FIGURE 1.7 – Représentation des domaines des modèles macroscopique Ω_M et microscopique Ω_m avec leur zone de recouvrement Ω_{Mm} .

1.2.1.2 Méthode Arlequin

La méthode Arlequin, introduite par Ben Dhia [DHI 98, DHI 05] permet de superposer à un problème macroscopique des régions d'intérêt ayant une analyse plus fine de la structure. De plus, cette approche permet de coupler des modèles différents comme par exemple des modèles discrets ou continus. Le raccord des différents problèmes se fait de manière faible dans les zones de recouvrement ou à la jonction. Sur la Figure 1.7 un modèle macroscopique est associé au domaine Ω_M et un modèle microscopique est associé au domaine Ω_m . La méthode consiste à chercher un couple de champs de déplacements solutions $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^M, \mathbf{u}^m)$ où la solution grossière \mathbf{u}^M est définie sur le domaine grossier et où la solution \mathbf{u}^m est définie sur le domaine fin.

La compatibilité des champs solutions est imposée de manière faible par des multiplicateurs de Lagrange qui permet de garantir l'égalité des champs \mathbf{u}^M et \mathbf{u}^m sur le domaine de recouvrement. De plus, une partition des énergies dans la zone de recouvrement est introduite. L'intégration numérique du couplage dans le domaine de recouvrement représente des difficultés. Néanmoins cette méthode a été appliquée avec succès [DHI 10] à des problèmes de propagation de fissure.

Bilan et limitations : La méthode Arlequin permet dans son approche originale de coupler deux domaines (distincts ou non) issus de modélisations pouvant être très différentes. La difficulté de cette méthode réside dans le choix des multiplicateurs de Lagrange recollant les domaines dans leur zone de jonction. Cette difficulté est principalement numérique, la jonction n'ayant pas forcément de sens physique.

1.2.2 Méthodes semi-concurrentes

1.2.2.1 Multi-grilles

La méthode multi-grille, [BRI 87], correspond à une stratégie de calcul itératif particulièrement efficace, proposée initialement pour la résolution de problèmes elliptiques linéaires discrétisés sur des grilles régulières raffinées. Cette approche s'appuie sur les méthodes itératives de relaxation et part du constat que ces dernières captent

rapidement les composantes hautes fréquences de la solution et peinent à obtenir les autres.

L'idée consiste alors à transporter le calcul sur une hiérarchie de grilles plus grossières que celle initiale, et à y saisir rapidement, via les méthodes de relaxation, toutes les composantes fréquentielles de la solution discrète. Le transport d'une grille à l'autre se fait par des opérateurs de restriction et de prolongement.

Dans [FIS 95a, FIS 95b], Fish et Belsky ont appliqué cette méthode pour étudier, sur deux échelles, le comportement mécanique de pièces constituées de matériaux composites périodiques. Pour ces problèmes, ils constatent que les opérateurs classiques de prolongement/restriction donnent une mauvaise approximation des composantes basses fréquences de la solution, et qu'un calcul basé sur un matériau homogénéisé est plus adapté.

Suivant cette remarque, ils proposent, pour ces opérateurs, une nouvelle expression basée sur la théorie de l'homogénéisation périodique et choisie de sorte à ce que le problème sur la grille grossière soit posé avec un matériau homogénéisé. Pour ce faire, ils définissent un opérateur de prolongement tel que :

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_H + \varepsilon \mathbf{c}_h : \Pi_H(\mathbf{L}_H : \varepsilon(\mathbf{u}_H)) \quad (1.48)$$

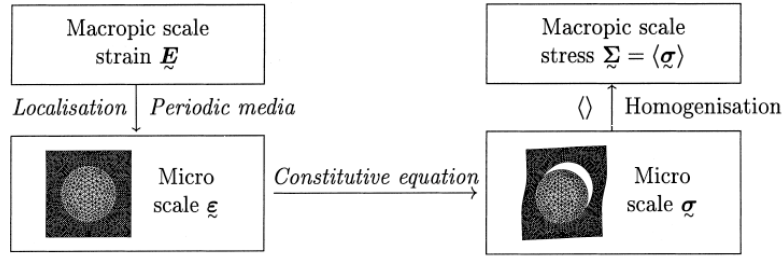
Dans cette expression, \mathbf{u}_h et \mathbf{u}_H désignent respectivement les champs de déplacement sur les grilles fines et grossières, tandis que \mathbf{c}_h est une fonction périodique discrétisée sur la grille fine et calculée par les développements classiques de l'homogénéisation périodique.

Bilan et limitations : Dans les approches multi-grilles, le passage par une grille grossière permet d'approximer le résultat sur la grille fine. Ces méthodes servent en particulier à accélérer la convergence des méthodes itératives classiques. Mais il est cependant difficile de donner un sens physique au problème grossier qui est purement numérique.

1.2.2.2 Méthode éléments finis à deux niveaux FE^2

La méthode FE^2 [SMI 98, FEY 00, KOU 02, YVO 07] s'inspire directement de la théorie d'homogénéisation pour suivre les mêmes étapes (localisation, homogénéisation). Partant d'une discrétisation éléments finis de la structure sur laquelle se base le problème macroscopique, à chaque point d'intégration de ce maillage est associé un problème microscopique unique représentant la microstructure élémentaire du matériau. La résolution peut être décrite par deux niveaux nécessaires à l'intégration du comportement non-linéaire du problème macroscopique au sein d'un algorithme itératif de type Newton-Raphson par exemple. L'algorithme est décrit par la figure 1.8 et se décompose comme suit :

- **Etape globale** : étape linéaire de la méthode de Newton-Raphson du problème macroscopique pour obtenir l'incrément de déformation macroscopique à chaque point d'intégration.

FIGURE 1.8 – Principe de la méthode FE^2 [FEY 00].

- **Localisation** : l'incrément de déformation de chaque point d'intégration applique des conditions aux limites de Dirichlet au problème microscopique. Le comportement du matériau est intégré à cette échelle pour résoudre chaque problème microscopique.
- **Homogénéisation** : La contrainte et le comportement tangent homogénéisés sont calculés pour chaque problème microscopique à l'aide de la relation de moyenne sur la cellule (1.7). Ces informations sont remontées à chaque point d'intégration du maillage macroscopique.
- **Equilibre global** : si les contraintes homogénéisées satisfont à l'équilibre du milieu macroscopique, le calcul se poursuit avec un nouveau pas de chargement. Sinon l'incrément de déformation est actualisé grâce au comportement tangent et un nouveau passage par l'échelle microscopique est réalisé.

Notons que les calculs microscopiques menés sur chaque cellule étant complètement indépendants, ils peuvent être aisément parallélisés. On peut également tenir compte dans chaque VER d'une loi de comportement non-linéaire quelconque. Cela nécessite cependant le stockage de toutes les variables d'histoire (variables internes...). Il est aussi possible, sur le principe, d'ajouter un niveau supplémentaire et de répéter le processus pour chaque point d'intégration de chaque cellule microscopique donnant ainsi lieu à une méthode dite FE^3 .

Bilan et limitations : La méthode suit les étapes des schémas d'homogénéisation classiques, il n'est cependant pas nécessaire de calculer le comportement effectif du volume représentatif. Les déformations macroscopiques de chaque point du maillage grossier sont descendues à l'échelle fine où est connu le comportement de l'hétérogénéité. Ensuite est remontée la quantité duale homogénéisée à l'échelle grossière où est assuré l'équilibre. Ainsi cette méthode est assez performante dans le cadre non-linéaire pour des petites déformations et un changement d'échelle bien défini. Il existe tout de même des améliorations consistant à prendre un milieu généralisé à l'échelle macroscopique pour s'affranchir de cette difficulté. L'avantage de la méthode est de proposer un changement d'échelle physique suivant les techniques d'homogénéisation en s'appuyant sur deux problèmes éléments finis à résoudre bien définis. L'inconvénient principal est le coût de calcul qui rend ces

calculs extrêmement lourds.

1.2.2.3 Méthode de projection de Dirichlet

L'approche de la méthode de projection de Dirichlet [ZOH 96, ODE 97] cherche à superposer à la solution macroscopique un enrichissement microscopique dans les zones d'intérêt. Pour cela, la méthode consiste à résoudre un problème homogénéisé, macroscopique sur un maillage régulier dont un élément correspond à une cellule représentative du matériau considéré. Un estimateur de sensibilité permet de localiser les zones du maillage macroscopique nécessitant une ré-analyse. Une correction est alors déterminée dans ces zones en résolvant sur les cellules concernées des problèmes locaux prenant en compte la microstructure pour des conditions aux limites homogènes de type Dirichlet. Un estimateur d'erreur *a posteriori* permet alors de déterminer la qualité de la solution corrigée. Plus précisément, les principales étapes de cette stratégie sont les suivantes :

- **Etape 1** : résolution du problème macroscopique sur un maillage régulier de domaine Ω . De plus, un opérateur de comportement homogénéisé est déterminé par une méthode d'homogénéisation quelconque.
- **Etape 2** : détermination des cellules ω_{corr} qui nécessitent une correction microscopique à l'aide d'un estimateur de sensibilité construit sur la solution macroscopique.
- **Etape 3** : résolution du problème microscopique sur chaque cellule à corriger où la solution macroscopique \mathbf{u}^M est utilisée comme condition limite de type Dirichlet. Ces problèmes peuvent bien sûr être résolus en parallèle et la solution totale s'écrit par prolongement de chaque solution locale :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^M + \sum_{E \in \omega_{corr}} \boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{u}_E), \quad (1.49)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_E$ est un opérateur de prolongement du champ microscopique \mathbf{u}_E défini sur la cellule E.

- **Etape 4** : étude de la solution améliorée à l'aide d'un critère d'erreur. Si ce critère n'est pas satisfait, la première idée est d'améliorer l'opérateur d'homogénéisation et de reprendre les étapes. Si le critère n'est toujours pas satisfait alors il faut utiliser un maillage plus grossier.

Bilan et limitations : Cette approche superpose à la solution en déplacement macroscopique un déplacement local seulement dans les zones nécessitant une correction. Si l'erreur persiste après prise en compte des déplacements locaux, alors il faut grossir le maillage ce qui constitue la force de l'approche. Cependant, la méthode d'homogénéisation pour obtenir l'opérateur d'homogénéisation doit être choisie en adéquation avec la microstructure et l'utilisateur est confronté à la difficulté de séparation des échelles. De plus les problèmes de bord liés à la zone hétérogène peuvent être compliqués à gérer avec un seul opérateur d'homogénéisation.

1.3 Vers une obtention des champs de déplacements en surface

Lors d'un essai sur une machine conventionnelle, de multiples moyens pour mesurer les déplacements et déformations existent. En voici quelques exemples :

- **Les capteurs machine** : les machines conventionnelles sont équipées de capteurs pour commander l'asservissement du mouvement. Ce peut être par exemple des roues codeuses ou des capteurs type LVDT (Linear Variable Differential Transformer). Par contre, ces capteurs ne sont pas forcément les plus fiables. Rien n'assure que le déplacement vu par l'éprouvette n'est pas modifié par la rigidité du système, le jeu des liaisons ou le rendement de la chaîne de transmission.
- **Les extensomètres** : ces capteurs possèdent deux bras mobiles dont la position initiale est connue. Lors du déplacement de la matière, l'écartement des deux bras permet la mesure de l'élongation à l'intérieur. Cette élongation est donc calculée au plus proche de la matière mais l'adhésion de l'extensomètre sur la matière est intrusive (pincement des lames des bras entraînant une striction, modification de la rigidité avec un collage...). Pour remédier à ces inconvénients, des extensomètres optiques ou laser utilisent le même principe sans contact. Toutefois, l'information est moyenne sur tout le champ observé ce qui rend compliqué l'étude de phénomènes locaux comme la striction ou des bandes de cisaillement. Enfin, le choix de la zone d'étude est définie *a priori* et l'événement attendu peut se produire hors de la zone d'étude.
- **Jauge de déformation** : une mesure plus locale peut être obtenue en plaçant sur un point particulier une jauge de déformation. Ce capteur est composé de plusieurs fils métalliques dont la résistance varie en fonction de l'élongation. La variation électrique est convertie pour obtenir l'élongation locale de la surface sur laquelle est fixée la jauge. En utilisant plusieurs jauges, il est possible d'obtenir la déformation dans plusieurs directions pour obtenir le tenseur complet des déformations. Les jauges sont aussi un capteur intrusif puisqu'elles doivent être collées sur la surface modifiant la rigidité locale du matériau et leur position est aussi à déterminer *a priori*.

Ces types de capteurs n'assurent pas l'obtention des déformations sur nombre de points clés d'une structure hétérogène. Les mesures de champs cinématiques résolvent ce problème. Elles permettent d'estimer les quantités cinématiques sur la totalité de la structure tout en délivrant une information locale en chaque point de la structure (à l'incertitude près). Une mesure globale représentative du comportement moyen et une information locale sont donc obtenues de manière non intrusive. Les méthodes de mesure de champs se classent suivant deux catégories : les méthodes interférométriques et les autres. Dans les méthodes interférométriques, le déplacement de l'objet crée des franges sur la surface (avec un rayonnement laser par exemple). Ces méthodes permettent de relever des mouvements très fins mais est délicate à mettre en œuvre (position des miroirs). Il existe plusieurs méthodes

non interférométriques de mesure de champs parmi lesquelles :

- **La méthode des grilles** : une grille est apposée sur la surface où les champs sont à calculer.
- **Le suivi de particules (PIV)** : surtout utilisée en mécanique des fluides, cette méthode consiste à suivre le déplacement de particules insérées dans un fluide. Cette méthode peut être utilisée en mécanique des solides si le matériau étudié contient déjà ces marqueurs ou si sa structure peut être modifiée sans incidence sur le comportement.
- **La corrélation d'images** : la corrélation d'images (DIC) compare deux images d'une surface prises à des instants différents. La première sera liée à l'état de référence et la seconde à l'état déformé. Grâce à un mouchetis sur la surface (naturel ou projeté par exemple de la peinture sur un matériau métallique), il est possible de retrouver par traitement numérique les champs cinématiques. Cette méthode nécessite des moyens expérimentaux raisonnables (une caméra parallèle à la surface d'étude) pour obtenir des mesures de champs avec une bonne résolution.

1.4 Corrélation d'images numérique

1.4.1 Principe de la conservation du flot optique

La corrélation d'images est une méthode qui mesure les variations globales et locales du champ de déplacement d'une structure. La méthode s'appuie sur l'équation du flot optique et permet de mesurer un déplacement à partir de deux images prises pour deux états différents de sollicitation mécanique. Il est supposé que la texture en surface de la structure est passive et ne change pas lors de l'essai et que les seules différences entre les images ne proviennent que du champ de déplacement. La texture de la surface est supposée le plus aléatoire possible soit naturellement soit par l'application d'un mouchetis (projection de peinture en noir et blanc) représenté sur la Figure 1.9.

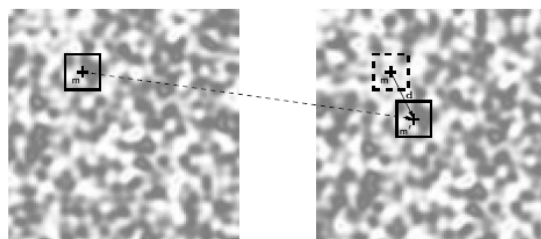


FIGURE 1.9 – Représentation des deux images de la corrélation.

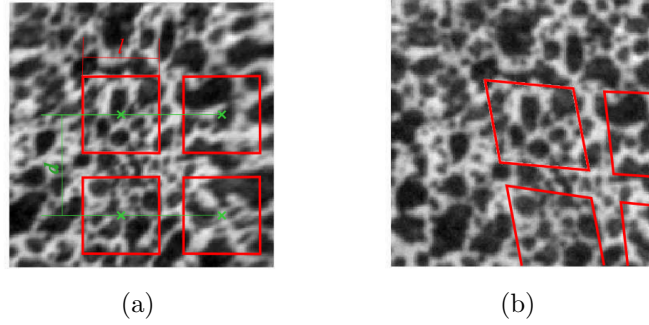


FIGURE 1.10 – Principe de la corrélation d'images locale : (a) image de référence avec les imageriettes, (b) image déformée avec les imageriettes déformées.

1.4.2 Corrélation d'images locale

1.4.2.1 Division de l'image en imageriettes

Les premiers développements de la corrélation d'images consistent à diviser l'image en imageriettes pour identifier leur position dans l'image déformée [SUT 83]. Chaque imageriette est traitée séparément une à une par rapport à l'image de référence pour obtenir le déplacement au centre de chaque imageriette comme représenté sur la Figure 1.10. Pour obtenir ce déplacement, un grand nombre de critères estimant le score de corrélation existent [GAR 01, SUT 09]. Deux familles de critères sont présentées succinctement ci-après.

1.4.2.2 Critère de corrélation

Critère SSD et ZSSD : Ce critère (Sum of Square Difference) est basé sur la minimisation de la différence entre les motifs à rapprocher. Cette différence est quantifiée sur les ixj zones considérées par $sc(x, y)$:

$$sc(x, y) = \sum_{i,j} [I_1(x + i, y + j) - I_2(x + i + d_x, y + j + d_y)]^2, \quad (1.50)$$

où d_x et d_y représentent les déplacements à estimer et les I_k sont les intensités en niveau de gris des images considérées. Cependant si les intensités lumineuses sont différentes entre les deux images, les résultats de corrélation sont mauvais. On peut alors normer l'intensité lumineuse des zones à corréler, ce qui nous donne le critère ZSSD (*Zero-mean Sum of Square Difference*).

CC et ZNCC : Une autre famille de critère (Cross Correlation) est basée comme son nom l'indique sur le produit scalaire entre les intensités des deux images à corréler :

$$sd(x, y) = \sum_{i,j} [I_1(x + i, y + j) \cdot I_2(x + i + d_x, y + j + d_y)] \quad (1.51)$$

Nous pouvons rapprocher ce critère du critère SSD en développant celui-ci :

$$sc(x, y) = \sum_{i,j} [I_1^2 + I_2^2 - I_1 \cdot I_2] \quad (1.52)$$

Puisque les termes $\sum_{i,j} I^2$ sont indépendants de d_x et d_y , pour ce critère nous viendrons donc minimiser la valeur $sd(x, y)$. Comme précédemment, de meilleurs résultats sont obtenus en normant l'intensité lumineuse, le critère s'appelle alors ZNCC (*Zero-mean Normalized Cross Correlation*).

1.4.2.3 Limites de la méthode locale

Ce procédé peut induire de fortes fluctuations d'une imagerie à l'autre (provenant du mouchetis ou d'une variation d'éclairage par exemple). Aussi, la plupart des codes de corrélation d'images locales réalisent ensuite un filtrage sur les déplacements calculés. Celui-ci n'est pas toujours maîtrisé par l'utilisateur et a rarement un sens physique.

1.4.3 Méthode globale

Apparue plus tard la méthode globale de corrélation s'appuie sur l'intégralité de l'image pour déterminer le champ de déplacement en s'appuyant sur un maillage et des fonctions de forme [BES 06]. Pour commencer, notons les deux fonctions $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ correspondant aux niveaux de gris de l'image de référence f et de l'image déformée g à la position \mathbf{x} (où \mathbf{x} représente le vecteur (x, y)). La corrélation d'images a pour but de trouver le champ de déplacement \mathbf{u} solution de l'équation du flot optique [HOR 81] dans la zone d'intérêt Ω :

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})). \quad (1.53)$$

Cette équation correspond au principe de conservation de la luminance. Il est à noter que si les deux images ne proviennent pas de la même caméra, leur niveau de gris doit être normalisé pour obtenir une dynamique d'image identique.

La résolution de l'équation (1.53) étant un problème inverse, l'objectif est simplement d'obtenir la meilleure approximation possible \mathbf{v} du champ de déplacement \mathbf{u} à l'intérieur d'un domaine Ω . Pour cela, la méthode des moindres carrés est utilisée pour résoudre ce problème ce qui revient à minimiser le résidu suivant :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \text{ArgMin}(\phi^2) \quad (1.54)$$

$$\phi^2(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}))]^2 d\Omega. \quad (1.55)$$

L'équation (1.55) est un problème mal posé, c'est-à-dire qu'il ne respecte pas la définition d'un problème de Hadamard, en particulier le fait que la solution est

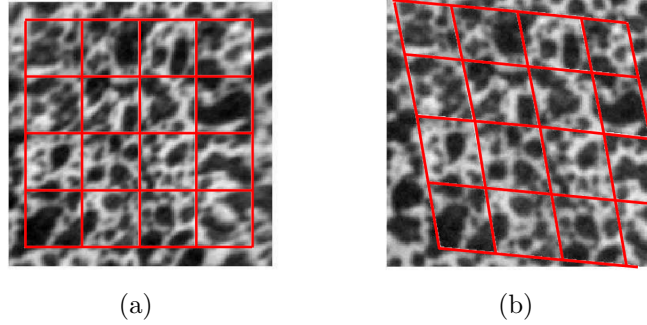


FIGURE 1.11 – Principe de la corrélation d'image globale : (a) image de référence avec un maillage élément fini, (b) image déformée avec le maillage déformé.

unique. En effet, la corrélation d'images se base sur la comparaison d'un mouche-tis plus ou moins aléatoire. Ainsi le résidu ϕ^2 peut avoir une solution éloignée du déplacement réel mais qui minimise tout de même ce résidu. Pour régulariser ce problème, le champ de déplacement \mathbf{v} est décomposé sur une base de fonctions à l'intérieur de la région Ω , comme le montre la Figure 1.11. Le champ \mathbf{v} se décompose comme suit :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} v_i \mathbf{N}_i(\mathbf{x}), \quad (1.56)$$

où les v_i sont les degrés de libertés associés aux fonctions de forme \mathbf{N}_i . Un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction g est réalisé :

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x}), \quad (1.57)$$

de telle sorte que l'équation (1.55) devienne :

$$\phi^2(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x})]^2 d\Omega. \quad (1.58)$$

En injectant l'expression du champ de déplacement provenant de l'équation (1.56), l'équation (1.58) devient :

$$\phi^2(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[\left(f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \right)^2 - 2 \left(f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \right) \left(\sum_i v_i \mathbf{N}_i \cdot \nabla g(\mathbf{x}) \right) + \left(\sum_i v_i \mathbf{N}_i \cdot \nabla g(\mathbf{x}) \right)^2 \right] d\Omega. \quad (1.59)$$

Finalement en écrivant les termes sous forme vectorielle et matricielle, l'équation (1.59) se lit :

$$\phi^2(\mathbf{v}) = K + \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} - 2 \mathbf{V}^T \mathbf{B}, \quad (1.60)$$

avec :

$$K = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})]^2 d\Omega, \quad (1.61)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} (\mathbf{N} \nabla g(\mathbf{x}))^T (\mathbf{N} \nabla g(\mathbf{x})) d\Omega, \quad (1.62)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} \mathbf{N} \nabla g(\mathbf{x}) \cdot (f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})) d\Omega. \quad (1.63)$$

\mathbf{M} est une matrice carrée, \mathbf{B} et \mathbf{V} des vecteurs colonne et K un scalaire ne dépendant pas du déplacement. Pour trouver le déplacement $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, il faut minimiser le résidu ϕ^2 , c'est à dire annuler sa dérivée par rapport à \mathbf{v} , soit :

$$\frac{\partial \phi^2}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}) = 0, \quad (1.64)$$

ie

$$\mathbf{M}\mathbf{V} - \mathbf{B} = 0 \quad \text{ie} \quad \mathbf{V} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}. \quad (1.65)$$

1.4.3.1 Résolution

Ensuite, il suffit de résoudre de manière itérative le système pour estimer les coefficients de \mathbf{V} et les injecter dans l'équation (1.56) pour obtenir les champs de déplacements. Pour cela, il est préférable d'avoir une solution initiale \mathbf{U}_{ini} assez proche de la solution recherchée pour éviter les minimums locaux. De plus, la matrice \mathbf{M} dépend de l'image déformée ce qui oblige à la recalculer pour chaque image. Pour accélérer les calculs, l'approximation utilisée est que le gradient de l'image déformée et de l'image de référence sont proches lorsque \mathbf{v} tend vers la solution. Les équations (1.62) et (1.63) deviennent :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} (\mathbf{N} \nabla f(\mathbf{x}))^T (\mathbf{N} \nabla f(\mathbf{x})) d\Omega, \quad (1.66)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} \mathbf{N} \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})) d\Omega. \quad (1.67)$$

La matrice \mathbf{M} est ainsi calculée une première -et unique- fois en fonction du niveau de gris de l'image de référence. Lors de la résolution du problème, seul le vecteur \mathbf{B} est itéré de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \mathbf{B}(\mathbf{U}_{ini}) \rightarrow d\mathbf{V}_1 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 &= \mathbf{B}(\mathbf{U}_{ini} + d\mathbf{V}_1) \rightarrow d\mathbf{V}_2 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_2 \\ &\text{et ainsi de suite jusqu'à la dernière itération} \end{aligned} \quad (1.68)$$

La solution est obtenue une fois que l'incrément de déplacement $d\mathbf{V}$ tend vers 0. Celle-ci est donc égale à :

$$\mathbf{V} = (\mathbf{U}_{ini} + \sum_n d\mathbf{V}_n). \quad (1.69)$$

La corrélation d'images est pratiquement toujours basée sur plus de deux images, il existe alors deux manières de mener le calcul sur une suite d'images. La première estime le déplacement entre l'image de référence et celle prise à l'instant t . Elle se cantonne généralement aux petits déplacements. Pour la seconde, correspondant à de grands déplacements, la corrélation d'images s'effectue entre l'image à l'instant $t - 1$ et celle à l'instant t , le champ de déplacement total étant la somme des champs partiels. Devant les forts déplacements présents d'une image à l'autre c'est cette seconde technique qui est utilisée même si elle a tendance à cumuler les incertitudes au fil du temps.

1.4.3.2 Erreur de corrélation

La méthode repose sur l'hypothèse de conservation de la luminance. Cette hypothèse est raisonnable mais lors de la mise en œuvre d'un essai, il faut s'assurer de la bonne tenue de certains éléments : pas de modification de l'éclairage (surtout dans le cas d'une lumière naturelle facilement variable), des mouvements hors-plan de l'éprouvette, un écaillage de la surface ou de la peinture, une défocalisation de l'ensemble optique. Lors du calcul, certains codes de corrélation permettent d'ajuster les niveaux de gris entre les images pour avoir la même dynamique.

Pour juger du résultat de la corrélation d'images, il est nécessaire de se fier à l'erreur de corrélation. L'erreur de la corrélation d'images est obtenue en soustrayant les niveaux de gris des images où l'image déformée contient le déplacement calculé \mathbf{v} :

$$b(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x})). \quad (1.70)$$

L'erreur est donc un champ de même taille que la zone d'intérêt en pixel et s'exprime en niveau de gris. Si la corrélation d'images est parfaite, alors l'erreur devrait être uniformément nulle [RÉT 10a]. L'analyse de l'erreur peut aiguiller sur les causes d'une mauvaise corrélation. En effet, dans le cas d'un mouvement hors-plan, les pixels incriminés deviennent plus flous et l'erreur de corrélation sera plus importante dans cette zone. De même dans le cas d'une ouverture à l'intérieur de la zone d'intérêt, le champ de déplacement étant continu, la fissure ne peut être captée. Elle apparaît ainsi nettement sur l'erreur de corrélation comme le montre les Figures 1.12(a) et 1.12(b).

1.4.3.3 Choix de l'espace des fonctions de forme

Le choix de la décomposition du champ de déplacement dans l'équation (1.56) est crucial pour le calcul de la corrélation d'images. Plusieurs bases de fonctions de forme ont été étudiées dans la littérature :

- **Finite element DIC (FE-DIC)** : les fonctions de forme éléments finis sont à la base de la corrélation d'images globale [BES 06, SUN 05] appelée FE-DIC. En plus d'obtenir un champ de déplacement plus précis que les méthodes de corrélation locale, l'apport se fait pour les méthodes d'identification de paramètres matériaux. En effet, avec un maillage pour la corrélation

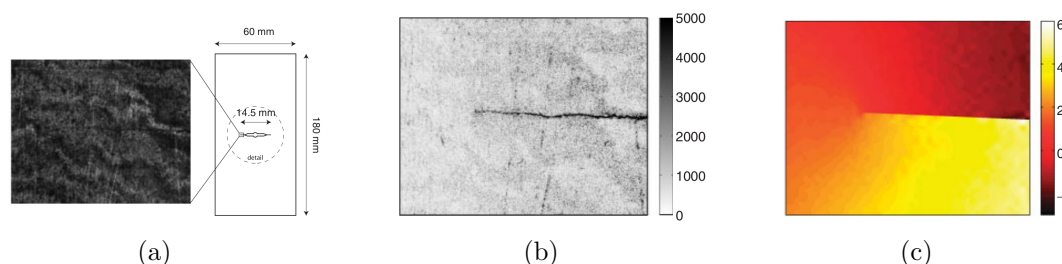


FIGURE 1.12 – (a) Région d'intérêt d'une éprouvette CCT soumise à de la traction. (b) Carte d'erreur de la corrélation d'images réalisée avec des éléments Q4. (c) Carte des déplacements normaux de la corrélation d'images avec discontinuité [RÉT 08].

d'images et la simulation numérique, les paramètres matériaux peuvent être calculés [AVR 08, RÉT 13, HIL 06, LEC 09].

- **Integrated-DIC (I-DIC)** : l'approche intégrée I-DIC prend en compte *a priori* la cinématique de déformation de la structure. Les quantités recherchées sont ainsi prises en compte dans les degrés de liberté de la mesure. Ainsi de nombreuses bases de fonctions ont été proposées : une cinématique de poutre en flexion avec une courbure linéaire [HIL 09] ou décomposée sur des fonctions NURBS [RÉT 10b]. Une décomposition du champ de déplacement sur les séries de Williams a aussi été réalisée pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes [ROU 06].
- **Extended DIC (X-DIC)** : dans le cas de fissurations, une fissure est détectée *a posteriori* et la continuité du champ de déplacement peut être levée localement en enrichissant à la manière de la méthode X-FEM comme le montre le résultat de la corrélation d'images avec une discontinuité sur la Figure 1.12(c). La X-DIC a été appliquée à la fissuration [RÉT 08] ou à la détection de bande de cisaillement [RÉT 07] et est développée plus longuement en Annexe D.

Dans notre travail, nous utiliserons une corrélation d'images basée sur les éléments finis. En effet, ce choix nous permettra de construire une corrélation d'images à chaque échelle du matériau, la première avec un maillage grossier ne tenant pas compte de la microstructure du matériau hétérogène. Et la seconde corrélation d'images est menée avec un maillage fin représentant chaque hétérogénéité pour obtenir un champ de déplacement microscopique sur toute la structure grâce à une caméra à très haute résolution.

1.5 Synthèse

Il a été montré par différents auteurs que le choix des conditions aux limites au cours de la résolution du problème microscopique peut avoir une grande importance. En effet, si la taille du volume élémentaire représentatif n'est pas très grande devant

la taille des hétérogénéités alors le comportement effectif calculé sera d'autant plus une approximation du comportement effectif réel. L'étude par corrélation d'images avec une caméra à très haute résolution nous permettra d'aborder ce problème en calculant les champs de déplacements aux échelles de l'hétérogénéité et de la structure d'un matériau architecturé.

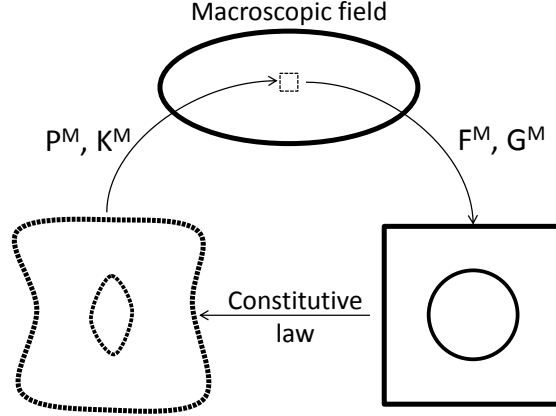
Choix de la méthode FE^2 : Parmi les méthodes multi-échelles, la méthode FE^2 utilise deux problèmes éléments finis distincts. Le couplage entre les échelles se fait de manière physique en suivant les étapes de l'homogénéisation classique. Chaque problème microscopique lié à un point macroscopique pourra s'appuyer sur la définition d'une cellule élémentaire. En assemblant tous ces problèmes éléments finis, un maillage entier de la structure est obtenu pouvant servir de base à la corrélation d'images. Ainsi grâce à cette corrélation d'images à l'échelle microscopique pourront être vérifiées les conditions aux limites utilisées lors de l'étape de localisation dans le schéma d'homogénéisation.

Dans leur première approche, les conditions aux limites des méthodes FE^2 sont basées sur les conditions aux limites périodiques classiques. Si le comportement de la cellule unitaire n'est pas périodique alors le calcul à l'échelle de la structure aura du mal à converger.

Améliorations de la méthode classique : Cette technique présente donc les mêmes limitations que la théorie de l'homogénéisation classique : elle reste pertinente lorsque les deux échelles sont bien séparées. Les conditions aux limites des problèmes microscopiques reposant sur la périodicité sont problématiques pour les cellules qui se situent dans la zone de transition avec le matériau homogène. De plus, de fortes non-linéarités géométriques ou matérielles peuvent provoquer une perte de l'unicité de la solution quand le comportement du matériau est adoucissant par exemple.

Pour étendre l'application de ces méthodes en dehors de l'élasticité et des petites déformations, on utilise généralement un milieu généralisé à l'échelle macroscopique sans changer le modèle microscopique. Différents types de milieux généralisés ont été implémentés comme les milieux de Cosserat [FEY 03, FOR 98, JÄN 10] ou des milieux du second ordre [KOU 04, KAC 08]. Leur cinématique enrichie permet de mieux rendre compte des forts gradients à l'échelle macroscopique et des effets de bord de la zone de transition. De même, un découplage des échelles n'est plus nécessaire.

Cependant, cette approche ne peut capter une bande de localisation qui apparaît à l'échelle microscopique et qui se propage en fissure menant à la rupture. Le moment où la localisation apparaît est estimé dans certains travaux, soit à partir d'une perte d'unicité de la solution du problème microscopique [BEL 10] soit à partir de calculs sur la déformation microscopique comme la transformation de Hough [COE 12]. Une discontinuité à l'échelle macroscopique est alors insérée et le saut de déplacement est donc calculé à partir de l'échelle microscopique.

FIGURE 1.13 – Principe de la méthode FE^2 [KOU 04].

Implémentation d'un milieu du second ordre : Dans la suite de ce travail, nous nous limiterons à l'analyse de la déformation de la structure macroscopique avant l'apparition d'une fissure en grandes déformations. Nous utilisons donc une méthode FE^2 avec un milieu macroscopique du second-ordre. La méthode est représentée sur la Figure 1.13. Le déplacement microscopique \mathbf{u}^m est donc défini par le tenseur des déformations \mathbf{F}^M et son gradient $\mathbf{G}^M = \nabla \mathbf{F}^M$:

$$\mathbf{u}^m(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^M \cdot \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{X} + o(\mathbf{X}^2), \quad (1.71)$$

où \mathbf{X} est la position d'un point du milieu microscopique. Les tenseurs de déformation macroscopiques sont introduits dans le plan par :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^M = \nabla_{OM} \mathbf{X} = X_{j,i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ \mathbf{G}^M = \nabla_{OM} \mathbf{F}^M = F_{jk,i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \end{cases} \quad (1.72)$$

où les \mathbf{e}_i sont les vecteurs unitaires du plan et les indices (i, j, k) prennent donc la valeur de un ou deux. Ensuite, l'idée est de condenser les termes d'ordre supérieurs à deux dans un champ microscopique inconnu noté \mathbf{w} comprenant les effets de l'échelle microscopique. Le champ de déplacement microscopique s'écrit donc :

$$\mathbf{u}^m = \mathbf{F}^M \cdot \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{X} \mathbf{G}^M \mathbf{X} + \mathbf{w}. \quad (1.73)$$

Le calcul des conditions aux limites périodiques pour un milieu d'ordre deux est détaillé dans l'annexe A. Les conditions aux limites périodiques sont dites généralisées car la périodicité entre les lignes homologues du contour est perdue. Chaque point du contour reste lié à son point homologue mais n'est plus lié à la ligne complète à laquelle il appartient. De plus, le lemme de Hill est généralisé et s'écrit maintenant :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{P}^M : \mathbf{F}^M + \mathbf{K}^M : \mathbf{G}^M, \quad (1.74)$$

où \mathbf{P}^M et \mathbf{K}^M sont respectivement les tenseurs de contraintes duales des tenseurs de déformations \mathbf{F}^M et \mathbf{G}^M et $:$ est le produit tensoriel entre deux tenseurs d'ordre supérieur.

Chapitre 2

Partie expérimentale

La première partie de ce chapitre détaille le choix des éprouvettes à l'aide de simulations numériques dites plein champ (le maillage rend compte de toutes les hétérogénéités). Une analyse des cinématiques de déformation à l'échelle macroscopique et microscopique est menée pour déterminer la forme de la zone architecturée. La seconde partie présente le plan d'expérience et le matériel utilisé. Les résultats de la corrélation d'images aux échelles macroscopique et microscopique sont ensuite étudiés. La grande plage de plasticité du matériau nécessite une amélioration de la corrélation d'images pour les grandes déformations.

Sommaire

2.1	Introduction	37
2.2	Pré-dimensionnement	37
2.2.1	Géométrie de la zone architecturée	37
2.2.2	Choix du matériau	39
2.2.3	Étude de la zone architecturée	39
2.2.4	Bilan	46
2.3	Essais	47
2.3.1	Matériel et dispositif	47
2.3.2	Courbe effort - déplacement	50
2.3.3	Corrélation d'images en grandes déformations	51
2.3.4	Les deux échelles de corrélation : maillages	51
2.3.5	Carte des champs de déplacements et déformations	52
2.3.6	Résidu de la corrélation d'images	58
2.4	Synthèse	60

2.1 Introduction

Les méthodes multi-échelles ont été développées pour résoudre les problèmes de structures contenant des matériaux hétérogènes avec un temps de calcul raisonnable. Pour valider ces méthodes, elles sont en général comparées au résultat d'une simulation numérique plein champ. Expérimentalement, seule la réponse globale de la structure est obtenue et des études *post-mortem* peuvent être réalisées pour obtenir des détails à l'échelle microscopique. L'utilisation des caméras à haute résolution peut devenir un outil pour caractériser les changements d'échelles dans les matériaux hétérogènes. La corrélation d'images, développée dans la Section 1.4.3 permet d'obtenir les champs de déplacements à l'échelle macroscopique et à la fois à l'échelle microscopique d'un matériau dont la microstructure a une dimension faible devant la structure macroscopique. Même si une séparation des échelles très importante (pour tenir compte des changements d'échelle entre microstructure, RVE et structure décrits dans la Section 1.1.1) est encore inconcevable pour les résolutions des caméras existantes, ce procédé va nous permettre d'étudier les cinématiques d'un matériau hétérogène aux deux échelles.

La structure macroscopique choisie est une plaque, en acier inoxydable de type 304L dont le comportement a été identifié jusqu'à rupture [RÉT 13]. L'épaisseur de la plaque est assez fine (1 mm) pour avoir une faible striction hors-plan. Pour créer un matériau architecturé, nous perçons cette plaque avec un réseau de trous dont le diamètre est faible devant les dimensions du plan moyen de la plaque. La distribution du réseau de trous est explicitée dans la Section 2.2.1.

La Section 2.2 présente le pré-dimensionnement des structures architecturées. Ce pré-dimensionnement est réalisé par des simulations numériques avec un maillage détaillant la microstructure (simulation dite *full field*). Une analyse des cinématiques de déformation de l'échelle macroscopique et microscopique est menée pour déterminer quelles géométries de la zone architecturée seront testées expérimentalement. Sur ces plaques, les résultats de la corrélation d'images sont présentés dans la Section 2.3. Le matériel et le montage sont aussi détaillés.

2.2 Pré-dimensionnement

2.2.1 Géométrie de la zone architecturée

La géométrie de la zone architecturée de la plaque est choisie circulaire afin d'éviter des concentrations de contraintes sur les bords qui impliquent des zones de localisation des déformations non voulues. A l'intérieur de la zone architecturée, nous générons un réseau de trou pour créer la microstructure. Pour cela, nous partons du centre de la zone architecturée (au centre du cercle) et choisissons deux directions de génération perpendiculaires : l'axe horizontal et l'axe vertical. Chaque ligne de génération passant par le centre est composée de 49 trous pour obtenir un changement d'échelle suffisant entre la microstructure et la structure macroscopique.

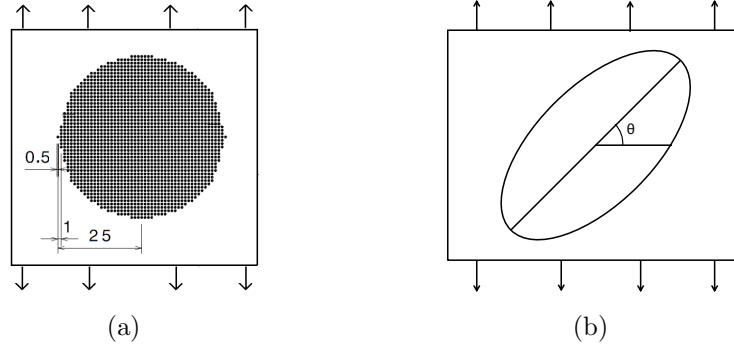


FIGURE 2.1 – Figure (a) : représentation de la zone architecturée à 0 degré avec une géométrie en cercle ; (b) représentation d’une zone architecturée elliptique, avec un grand axe et un petit axe de longueur A et B , inclinée d’un angle θ .

Le réseau de trous est un réseau carré. Le diamètre du trou et la distance inter-trous sont fixés à 0.5 mm. Dans le reste de la zone architecturée, un trou est généré si la position de son centre est à l’intérieur du cercle de diamètre 49 mm. La géométrie de la zone architecturée en cercle et les dimensions caractéristiques sont représentées sur la Figure 2.1(a).

Plusieurs lignes, horizontales ou verticales, ont dans leur longueur un nombre de trous égal. Comme la direction de chargement est verticale, deux trous sont ajoutés sur la ligne horizontale centrale pour localiser les déformations et rompre la structure architecturée sur cette ligne de trous. L’épaisseur de la plaque est égale à 1 mm. Les dimensions de la zone architecturée ont été choisies pour répondre aux exigences de la caméra en terme de résolution et de taille de pixels. La cellule unitaire est donc un carré avec un trou en son centre dans le plan, ou un cube avec un trou dans l’épaisseur de la plaque en trois dimensions.

Deux paramètres sont définis afin de faire évoluer la géométrie de la structure architecturée en conservant la géométrie de la cellule unitaire identique. Le premier paramètre est un angle d’inclinaison de la structure architecturée. En inclinant la structure dans le plan et en gardant la direction de chargement fixe, nous souhaitons soumettre la microstructure à des sollicitations différentes. Le second paramètre est le rapport d’ellipse (égal à un dans le cas d’une géométrie circulaire) afin d’étudier l’influence du nombre de cellules unitaires dans la structure. Le rapport de l’ellipse ($R = \frac{A}{B}$) est égal au rapport entre la longueur du grand axe (A) et la longueur du petit axe de l’ellipse (B). En effet, le nombre de cellules unitaires est égal à 1862 pour le cercle, respectivement 1262, 948 ou 642 pour une ellipse de rapport R égal à 2, 3 ou 4. Le nombre de cellules dans l’axe horizontal est conservé, seul l’axe vertical voit son nombre de cellules diminué par le rapport d’ellipse. La zone architecturée inclinée d’un angle θ en forme d’ellipse (de rapport R) est représentée sur la Figure 2.1(b).

Angle (°) / Rapport	1	2	3	4
0	X			
30	X	X	X	X
45	X	X	X	X

TABLE 2.1 – Détail des deux paramètres fixés pour l’étude de différentes géométries de la zone architecturée.

Pour analyser l’influence des ces deux paramètres, nous décidons de tester plusieurs géométries de la structure architecturée. Ces géométries sont répertoriées dans la Table 2.1.

2.2.2 Choix du matériau

Le matériau homogène à partir duquel est construit le matériau hétérogène est un acier inoxydable de type 304L. Cet acier a une relation de comportement élasto-plastique connue avec une grande plage de déformation plastique et pas d’endommagement. Le comportement a été identifié sur des barreaux avec un trou central par des essais de corrélation d’images et stéréo-corrélation [RÉT 13]. L’identification a été menée avec des simulations en trois-dimensions où la méthode d’identification des paramètres basée sur la FEMU [KAV 71] (méthode de recalage de modèles éléments finis) a été utilisée. La méthode consiste à recalculer de façon itérative les propriétés matériaux du modèle éléments finis à partir d’une comparaison entre champs cinématiques calculés et champs mesurés, ici par corrélation d’images.

Pour l’acier inoxydable 304L utilisé, le comportement matériau calculé est composé du régime élastique linéaire avec un module de Young, égal à 168 GPa , et un coefficient de Poisson, égal à 0.25. Pour le régime plastique, un écrouissage isotrope non-linéaire est considéré. L’évolution du seuil de plasticité (σ_Y) en fonction de la déformation plastique est paramétrée comme suit :

$$\sigma_Y(\varepsilon_p) = H\varepsilon_p + S_Y\left(1 + \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^\delta, \quad (2.1)$$

H étant un coefficient d’écrouissage linéaire, S_Y la contrainte limite d’élasticité, ε_0 un facteur d’échelle pour la déformation plastique cumulée et δ l’exposant d’écrouissage qui sont respectivement fixés à 1480 MPa, 284 MPa, 10^{-5} et 0.042.

2.2.3 Étude de la zone architecturée

Le maillage des différentes géométries a été réalisé avec le logiciel de maillage *gmsh* [GEU 09]. Le maillage est composé de triangles à un point de Gauss avec 12 nœuds autour de chaque trou de la zone architecturée. Le maillage est ensuite exporté et les simulations numériques sont menées avec le logiciel de calcul éléments

finis *Abaqus*. Le maillage contient un très grand nombre de degrés de liberté en deux dimensions (224758 degrés de liberté dans le cas du cercle). Cela fait que nous utilisons l'hypothèse des contraintes planes afin d'obtenir une simulation en deux dimensions avec un temps de calcul raisonnable. Le chargement imposé est de la traction uniaxiale dans la direction verticale.

Une étude discriminante sur les paramètres définissant la géométrie de la zone architecturée est menée. Dans la Section 2.2.3.1, le taux de triaxialité des contraintes est analysé. Le but de tester différentes géométries est d'obtenir un taux de triaxialité le plus hétérogène possible afin que toutes les sollicitations soient présentes dans la structure. La cinématique de déformation de la géométrie macroscopique est ensuite étudiée dans la Section 2.2.3.2. Enfin, l'ovalisation des trous du réseau architecturé est caractérisée dans la Section 2.2.3.3. Une étude statistique est menée sur ces paramètres.

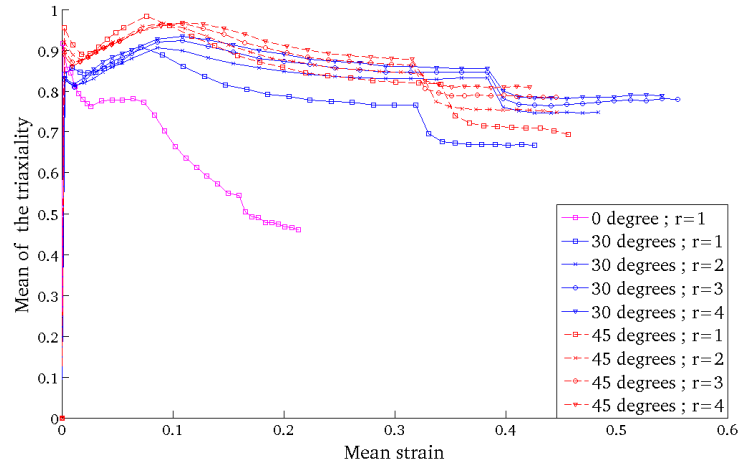
2.2.3.1 Taux de triaxialité

Le taux de triaxialité est le rapport entre la pression hydrostatique (P_{hydro}) et la contrainte équivalente de von Mises (les contraintes hors-plan σ_{13} , σ_{23} et σ_{33} sont nulles) :

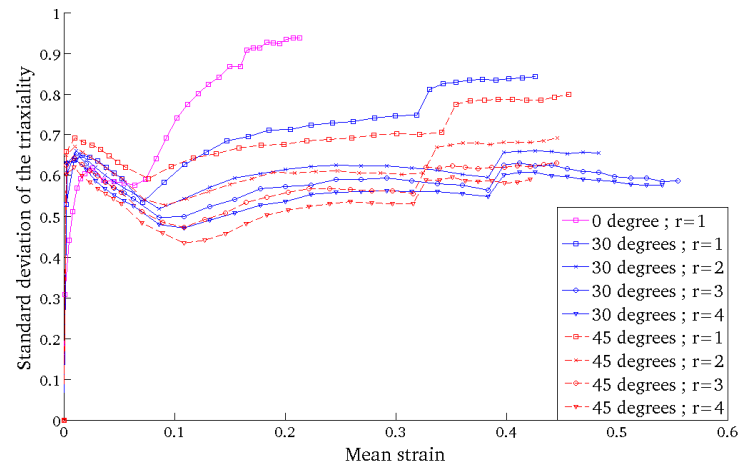
$$triax = \frac{P_{hydro}}{\sigma_{VM}} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2}} \quad (2.2)$$

L'évolution de la moyenne et de l'écart-type du taux de triaxialité dans les éléments en fonction de la déformation moyenne des plaques est donnée sur la Figure 2.2. La déformation moyenne ($\frac{U_y}{L_y}$) correspond à la déformation dans la direction longitudinale de la plaque où L_y est la longueur verticale initiale de la plaque et U_y est l'allongement vertical. La courbe magenta représente la géométrie en cercle de la zone architecturée non inclinée. Les quatre courbes bleues correspondent aux quatre plaques avec une géométrie inclinée de 30 degrés par rapport à la direction horizontale. Chaque courbe est identifiée pour chaque rapport de l'ellipse macroscopique avec un symbole différent. Enfin, les quatre courbes rouges correspondent aux géométries inclinées de 45 degrés où les mêmes symboles identifient chaque rapport de l'ellipse. Ces choix de couleur seront les mêmes dans les figures suivantes.

Le chargement en traction fait que la moyenne du taux de triaxialité est positive quelque soit la géométrie initiale. La géométrie en cercle non inclinée (courbe magenta) a la plus faible moyenne (de 0.75 à 0.4). Toutes les autres géométries ont une moyenne similaire (entre 0.8 et 0.9). En revanche, l'écart-type est plus important (de 0.6 à 1) pour la géométrie en cercle non-inclinée, ce qui montre que les éléments sont soumis à des sollicitations très différentes dans la zone architecturée. Pour toutes les géométries inclinées, l'écart-type est assez similaire (entre 0.4 et 0.6) à l'exception des deux géométries en cercle inclinées où celui-ci est plus important (entre 0.6 et 0.8). Le taux de triaxialité varie peu lorsque la déformation macroscopique augmente quelque soit la géométrie initiale. Ce n'est donc pas un critère discriminant.



(a)



(b)

FIGURE 2.2 – Évolution de la moyenne (a) et de l'écart-type (b) du taux de triaxialité en fonction de la déformation moyenne $\left(\frac{U_y}{L_y}\right)$ de la plaque. Chaque courbe correspond à une géométrie de la zone architecturée différente où R est le rapport de l'ellipse et l'angle l'inclinaison de l'ellipse.

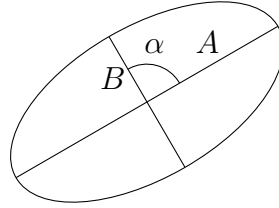


FIGURE 2.3 – Représentation des paramètres de l'ellipse : longueur du grand axe (paramètre A), longueur du petit axe (paramètre B) et écrasement (paramètre α).

2.2.3.2 Évolution de la zone architecturée à l'échelle macroscopique

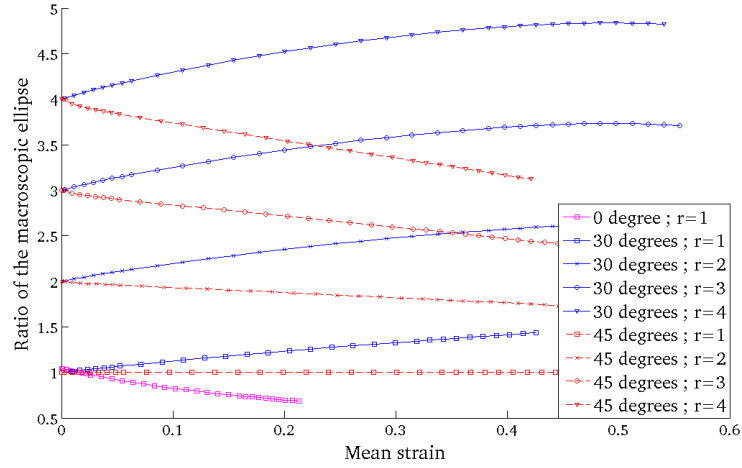
Dans cette partie, nous étudions l'effet de la traction sur la géométrie de la zone architecturée. Pour cela, nous suivons la position des trous les plus excentrés des droites de génération de la géométrie de la zone architecturée. Ces trous donnent la longueur du grand axe et du petit axe ainsi que leur inclinaison au cours de la déformation. A partir de l'inclinaison des axes, nous étudions l'évolution de l'angle α entre les axes de l'ellipse avec l'intensité du chargement. Ces paramètres sont représentés sur la Figure 2.3.

L'évolution du rapport ($R = \frac{A}{B}$) et de l'écrasement α de l'ellipse macroscopique en fonction de la déformation moyenne des plaques est donnée sur la Figure 2.4. La géométrie en cercle non inclinée (courbe magenta) se comporte comme attendu : l'axe vertical s'allonge sous l'effet de la traction alors que l'axe horizontal rétrécit (effet Poisson). Le cercle est donc étiré dans la direction verticale et se transforme en une ellipse (Figure 2.4(a)).

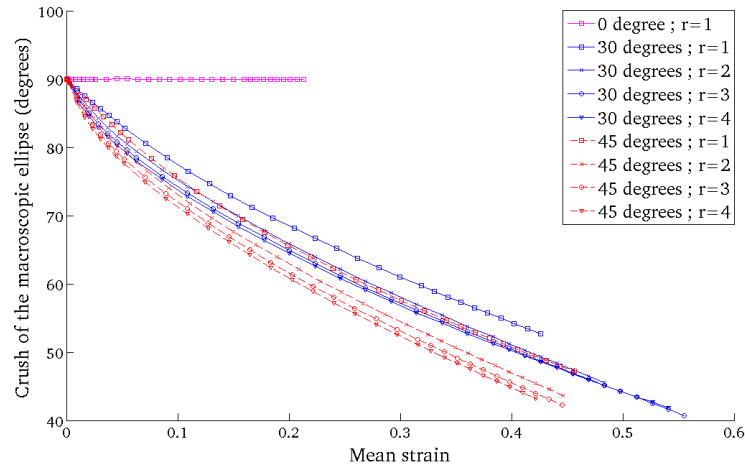
Quand le réseau de trous s'incline (cas à 30 et 45 degrés), le rapport de l'ellipse évolue complètement différemment. A 30 degrés, le grand axe s'allonge grandement alors que le petit axe évolue très peu quelque soit la géométrie initiale. A 45 degrés, le phénomène est inversé, le grand axe s'allonge très peu alors que le petit axe s'agrandit énormément sauf dans le cas où la géométrie initiale est circulaire. En effet, dans le cas du cercle, la répartition de la zone architecturée est symétrique par rapport au chargement. Cela fait que les deux axes se déforment de manière identique et le rapport des longueurs n'évolue donc pas alors que quand la géométrie initiale est une ellipse, le petit axe va plus se déformer sous l'effet de la dissymétrie du réseau de trous par rapport au chargement entraînant la diminution du rapport d'ellipse.

Regardons maintenant l'évolution de l'écrasement de l'ellipse (paramètre α) tracée sur la Figure 2.4(b). A 0 degré, la direction de chargement est colinéaire avec l'une des deux directions de génération du réseau de trous ce qui fait que l'angle entre les axes du cercle n'évolue pas avec le chargement.

Quand le réseau de trous s'incline (cas à 30 et 45 degrés), les axes de l'ellipse se rapprochent de la direction de chargement verticale. La conséquence est que l'ellipse s'écrase sur elle-même. L'angle entre les axes de l'ellipse, initialement égal à 90 degrés, diminue fortement quelque soit la forme de la géométrie initiale (cercle ou



(a)



(b)

FIGURE 2.4 – Évolution du rapport (a) et de l'écrasement (b) de l'ellipse macroscopique formant la zone architecturée en fonction de la déformation moyenne $\left(\frac{U_y}{L_y}\right)$ de la plaque.

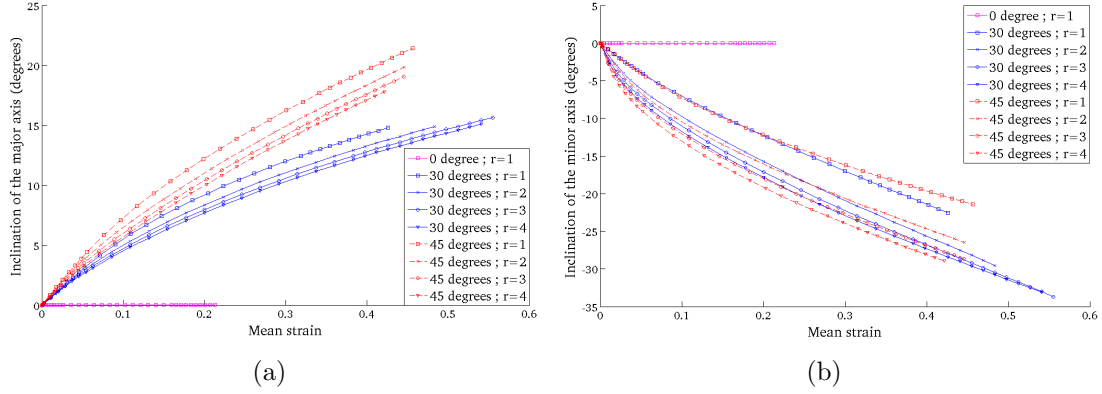


FIGURE 2.5 – Évolution de l’inclinaison du grand axe (a) et du petit axe (b) par rapport à leur position initiale de l’ellipse macroscopique. Cette évolution est tracée en fonction de la déformation moyenne $\left(\frac{U_y}{L_y}\right)$ de la plaque.

ellipse) au cours de la déformation. L’évolution de l’inclinaison de chaque axe par rapport à sa position initiale est donnée sur la Figure 2.5. Les axes des géométries initiales en ellipse se rapprochent de manière similaire de l’axe de traction vertical (inclinaison positive pour le grand axe et négative pour le petit axe). Remarquons par contre que lorsque la géométrie initiale est circulaire, l’inclinaison du petit axe est moindre que pour les ellipses.

2.2.3.3 Étude à l’échelle microscopique

Après l’étude de la cinématique de déformation de la géométrie macroscopique de la zone architecturée, nous descendons à l’échelle de chaque trou du réseau pour analyser sa déformation. Chaque trou est maillé à partir de 12 nœuds répartis régulièrement sur son périmètre. En considérant que les trous s’ovalisent sous forme d’ellipse au cours de la déformation, nous calculons les paramètres de l’ellipse (longueur du grand axe (a) et petit axe (b), inclinaison (φ) passant au plus proche des nœuds de chaque trou. Pour cela, nous utilisons un algorithme de Nelder-Mead [LAG 98] pour déterminer les paramètres de l’ellipse. Cet algorithme est fréquemment utilisé comme technique d’optimisation de paramètres non linéaire.

Les repères liés au trou ovalisé (X , Y) et au chargement (x , y) sont représentés sur la Figure 2.6 où l’angle φ est l’angle de rotation entre les deux repères. L’équation de l’ellipse est donnée dans le repère local en fonction des longueurs des demi-axes a et b :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (2.3)$$

Nous cherchons à déterminer les paramètres caractérisant l’ovalisation de l’ellipse par rapport au repère du chargement. L’équation de l’ellipse dans le repère du char-

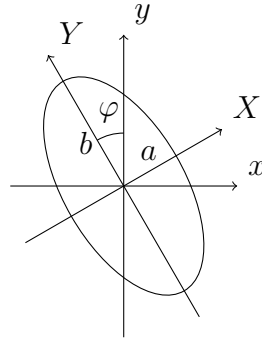


FIGURE 2.6 – Repère local (X,Y) et repère global (x,y)

gement (x, y) est égale à :

$$\frac{x^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{x^2 \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{y^2 \cos^2 \varphi}{b^2} + \frac{y^2 \sin^2 \varphi}{a^2} + 2xy \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 1 \quad (2.4)$$

Pour chacun des trous de chaque zone architecturée, nous calculons donc les trois paramètres $(a, b \text{ et } \varphi)$ caractérisant l'ovalisation des trous grâce à l'algorithme de minimisation.

L'évolution de la moyenne du rapport $(r = \frac{a}{b})$ de l'ovalisation des trous et de leur inclinaison en fonction de la déformation moyenne des plaques est donnée sur la Figure 2.7. Pour la géométrie en cercle non inclinée, les trous s'ovalisent peu sous l'effet de la traction verticale. En effet, la distribution des trous facilite l'apparition d'une fissure qui vient rompre rapidement la zone architecturée. De plus, les trous ne s'inclinent pas comme le montre la Figure 2.7(b).

Quand le réseau de trous est incliné (à 30 ou 45 degrés), les trous s'ovalisent plus fortement (la moyenne allant jusqu'à un rapport égal à 5) quelque soit la géométrie initiale de la zone architecturée. Les géométries en cercle (courbes avec le symbole \square) ont un plus faible rapport d'ovalisation que les ellipses. L'écart-type du rapport d'ovalisation des trous est faible devant la moyenne montrant une similitude de déformation des trous du réseau.

Par contre, nous pouvons remarquer que l'angle avec lequel s'ovalise les trous diffère suivant l'inclinaison initiale de la zone architecturée (Figure 2.7(b)). A 45 degrés, les trous de la géométrie en cercle ont une moyenne de l'angle d'inclinaison nulle avec un écart-type très faible (inférieur à un degré). La direction du chargement étant symétrique par rapport à la distribution des trous, la moyenne obtenue est nulle, ce qui n'est plus le cas pour les géométries macroscopiques elliptiques. L'angle d'inclinaison des trous de ces géométries a bien une moyenne non nulle mais celle-ci reste très faible (deux degrés au maximum).

A 30 degrés, les trous de la zone architecturée ont une inclinaison importante (moyenne à 15 degrés au départ) quelque soit la géométrie initiale. Cela montre que les trous ne s'ovalisent pas suivant la direction de traction macroscopique au début du

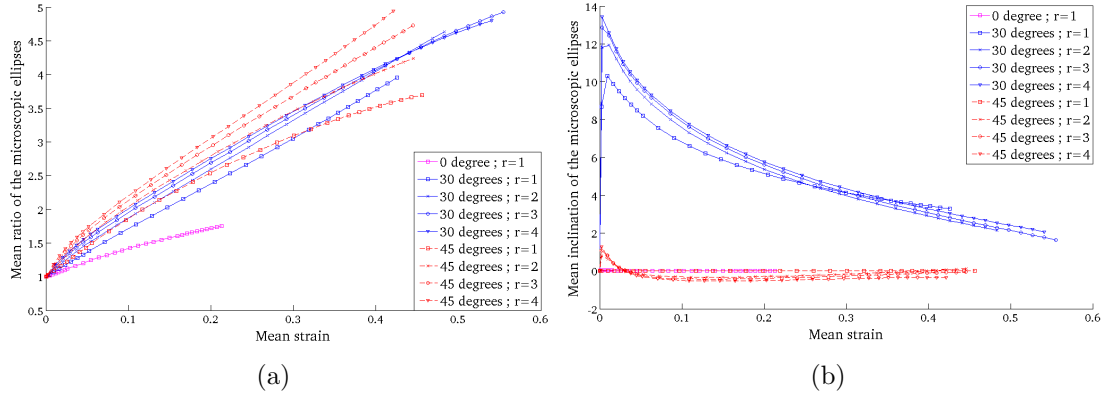


FIGURE 2.7 – Évolution du rapport (a) et de l’inclinaison (b) de l’ovalisation des trous de la zone architecturée en fonction de la déformation moyenne $\left(\frac{U_y}{L_y}\right)$ de la plaque.

chargement. Au cours du chargement, les trous s’inclinent vers la direction verticale (inclinaison moyenne de 4 degrés vers la fin). Ce phénomène peut s’expliquer par le fait que les axes de la géométrie macroscopique s’inclinent aussi vers la verticale ce qui a tendance à orienter le réseau de trous à l’échelle microscopique.

2.2.4 Bilan

Un matériau architecturé modèle a été conçu comme support d’une expérience. L’objectif est d’étudier les cinématiques de déformation à l’échelle de la microstructure pour analyser les influences entre les cellules voisines grâce à une caméra à très haute résolution. Il a été fait le choix d’une cellule unitaire carrée avec un trou au centre. Dix zones architecturées ont été créées avec deux directions de génération perpendiculaires des trous. Trois inclinaisons (0, 30 et 45 degrés) avec quatre géométries macroscopiques différentes (rapport d’ellipse égal à 1, 2, 3 et 4) sont simulées numériquement avec un maillage microscopique.

Une étude sur trois paramètres a été menée pour déterminer les microstructures à conserver pour les expériences. L’analyse du taux de triaxialité a permis de montrer que toutes les géométries sont soumises à une large plage de sollicitations. L’évolution de la géométrie de la zone architecturée à l’échelle macroscopique identifie trois cinématiques de déformation distinctes suivant l’inclinaison initiale de la zone architecturée. De même l’étude de l’ovalisation des trous de la zone architecturée arrive au même résultat, quelque soit la géométrie initiale macroscopique.

Ces études ont montré que le rapport d’ellipse (R) a peu d’influence sur les cinématiques de déformation de la zone architecturée ou des trous du réseau. Nous choisissons donc de limiter l’étude expérimentale à trois zones architecturées circulaires inclinées de 0, 30 et 45 degrés en conservant une direction de chargement

fixe.

La section 2.3 présente le dispositif expérimental et le matériel optique utilisé pour prendre les images des expériences. Ensuite les résultats de la corrélation d'images sont analysés pour chacune des trois orientations du réseau de trous.

2.3 Essais

Le pré-dimensionnement numérique nous a permis de choisir trois structures architecturées différentes à tester expérimentalement. La forme de la zone architecturée est choisie circulaire, avec 49 trous dans chaque diamètre. Trois éprouvettes sont obtenues en inclinant le pavage périodique (horizontal, vertical) de 0, 30 et 45 degrés par rapport à la direction de chargement fixe. Le matériau homogène de base est l'acier inoxydable 304L, décrit précédemment dans la Section 2.2.2. Les trous du réseau, d'un diamètre de 0.5 mm ont été percés avec une perceuse à commande numérique. La condition fonctionnelle de position des trous lors de la fabrication a été imposée à 0.02 mm. Le dessin technique de l'éprouvette non inclinée est donné sur la Figure E.1 (Annexe E).

Un soin particulier pour la mise en place du montage est nécessaire. Le plan focal du capteur de la caméra doit être positionné parallèlement à la surface à corrélérer. Le matériel et le dispositif sont détaillés dans la Section 2.3.1.

Les résultats de la corrélation d'images aux échelles macroscopique et microscopique sont présentés dans la Section 2.3.5. A cause des grandes déformations autour des trous, une régularisation des champs de déplacement a été implémenté dans la corrélation d'images. Les cartes de résidus des deux corrélations d'images pour les trois éprouvettes sont présentées pour finir dans la Section 2.3.6.

2.3.1 Matériel et dispositif

Une caméra très haute résolution est utilisée pour prendre les images de l'expérience au cours de la déformation. La caméra, Vieworks VN-29MC-M5A0-FM, est équipé d'un capteur de 28.8 millions de pixels répartis de façon à obtenir une image rectangulaire de 6576 par 4384 pixels. Ensuite, la technologie dite *pixel shifting* prend quatre ou neuf images (pour lesquelles le capteur est décalé de 1/2 ou 1/3 de pixels dans chaque direction) pour augmenter la résolution des images après reconstruction à 115 ou 259 millions de pixels au maximum (répartis en 19728 par 13152 pixels pour la plus haute résolution). Un actionneur piézo-électrique déplace le capteur de la caméra sur une grille de 2x2 ou 3x3 positions de fractions d'un pixel. L'image à très haute résolution est créée pixel par pixel en reconstruisant la grille à partir des 4 ou 9 images prises. Les images haute définition ainsi reconstruites sont de meilleure qualité qu'une interpolation simple d'une seule image avec une création de pixels. L'évolution de l'incertitude de mesure de la corrélation d'images sur un mouvement de corps rigide est donnée sur la Figure 2.8 où est comparé une seule

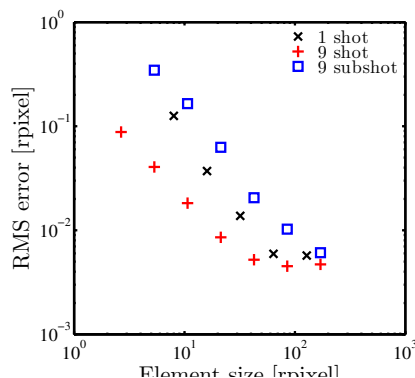


FIGURE 2.8 – Évolution du résidu de corrélation d’images en fonction de la taille de l’élément (en pixels).

image (29 Mpixels en noir), une image haute résolution (259 Mpixels en rouge) et une image haute résolution (259 Mpixels en bleu) créée à partir d’une interpolation de la première image.

La résolution de la caméra et les dimensions de la structure architecturée font que la dimension d’un pixel est de l’ordre de $10\ \mu m$ (largeur de l’image placée dans la largeur de la plaque). Ainsi, le mouchetis pour la corrélation d’images devra être très fin. Pour cela, nous nous sommes dotés d’un aérographe de peinture, Badger Sotar 20/20, permettant de projeter de très petites gouttelettes sur la surface à corréler. Les tâches de peinture descendent jusqu’à quelques dizaines de microns. L’utilisation classique de bombes de peinture (pouvant boucher les trous) ne permet pas de descendre en dessous de 100 microns avec beaucoup de minutie. Le mouchetis est visible sur la Figure 2.10 où le diamètre d’un trou est égal à $500\ \mu m$.

La Figure 2.9 montre la caméra avec l’objectif et l’éprouvette montée sur la machine de traction préalablement à l’essai. Un objectif, Schneider Xenon Emerald, avec une focale de $200\ mm$ est monté sur la caméra. La caméra est placée perpendiculairement à la surface à corréler. La plaque est tenue au niveau des mors de traction par adhérence avec une surface striée pour augmenter le coefficient de frottement. Des trous avec des vis ont été ajoutées pour éviter un trop grand glissement des mors par rapport à la plaque même si la corrélation d’images permet d’obtenir le déplacement des bords de l’éprouvette. Deux lampes à LED blanches, disposées symétriquement, illuminent la surface à corréler lors de l’essai. Le mouchetis a été obtenu par un dépôt de peinture blanche puis un dépôt de peinture noire. Un drap noir est placé derrière l’éprouvette, la valeur de ces pixels pouvant fortement dépendre de la lumière extérieure.

Pour la prise d’images, nous décidons de prendre dix images dans la zone de réponse linéaire de l’éprouvette, puis de garder cet intervalle de mesure au début de la zone non-linéaire (pendant 10 prises). Ensuite, grâce à la connaissance de la loi de comportement de l’acier, nous estimons l’allongement à rupture de la plaque (par

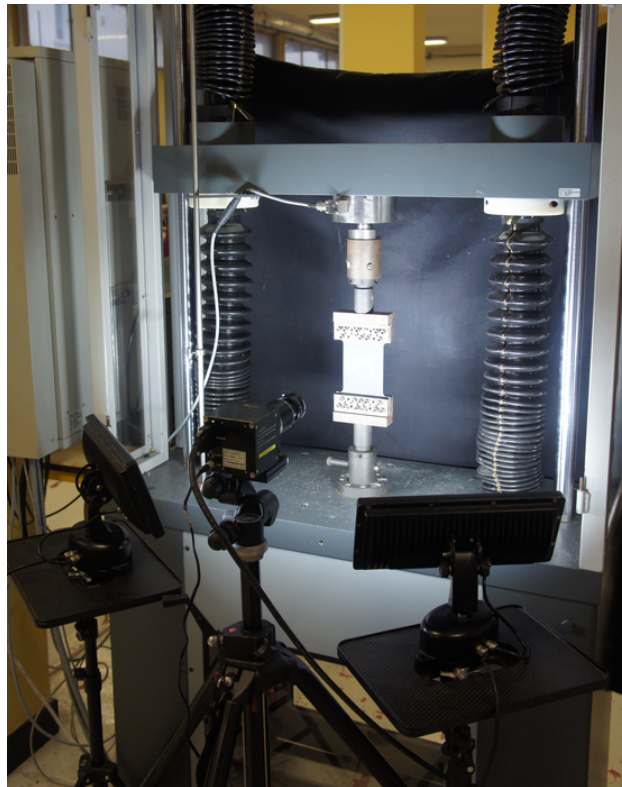


FIGURE 2.9 – Photographie du montage expérimental mis au point pour la prise d'images sur les éprouvettes.

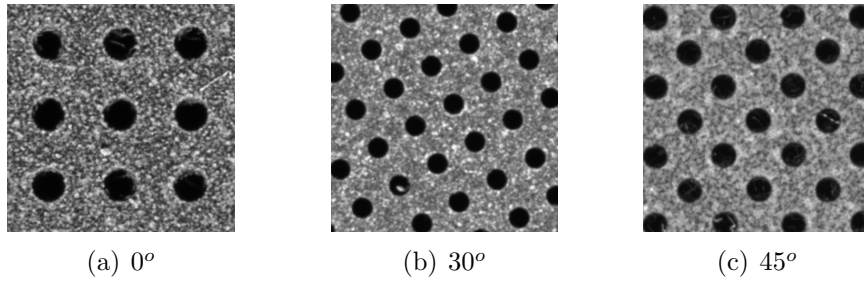


FIGURE 2.10 – Visualisation d’un zoom de l’image de référence au centre de la zone architecturée pour les trois orientations du réseau.

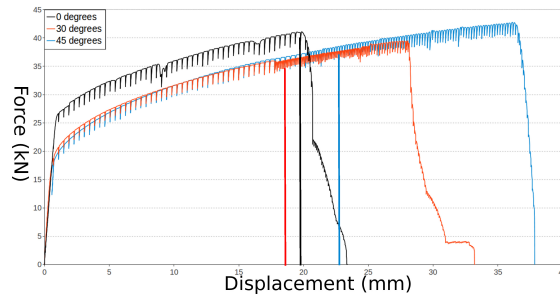


FIGURE 2.11 – Courbe de l’effort en fonction du déplacement machine pour les trois orientations du réseau de trous. Le trait vertical correspond à l’image sélectionnée pour la présentation des résultats de corrélation d’images pour chaque orientation du réseau.

calcul de la section effective en omettant les trous du réseau dans la ligne horizontale centrale). Un incrément de déplacement entre chaque image est ainsi calculé pour prendre 80 images dans le domaine de déformation plastique de la plaque.

2.3.2 Courbe effort - déplacement

Les courbes de l’effort en fonction du déplacement de la traverse de la machine de traction sont représentées sur la Figure 2.11. Le chargement mécanique de la plaque est stoppé chaque fois qu’une image est prise pour éviter une mauvaise reconstruction des images de très haute résolution. Le déplacement est maintenu et l’effort décroît à cause de la relaxation. L’image est prise une fois que l’effort est stable produisant des lignes verticales dans les courbes d’effort. L’arrêt de la traction est obligatoire puisque la caméra met 3 secondes à prendre les 9 images. Sans un arrêt de la traction, les 9 images ne correspondraient pas au même état de chargement. La vitesse de déplacement de la traverse est de 0.1 mm par minute dans la zone élastique et ensuite 1 mm par minute dans la zone plastique jusqu’à rupture.

Sur la Figure 2.11, l'axe des abscisses représente le déplacement de la traverse mobile de la machine de traction. Les éprouvettes ont la même longueur et le glissement dans les mors est minimisé grâce à l'utilisation de vis en plus de la surface abrasive. L'évolution de l'allongement à rupture de chaque plaque est donc assez proche de l'évolution de ces courbes, au rapport de la longueur initiale. Ainsi, la zone architecturée avec le réseau non incliné a le plus faible allongement à rupture, devant la plaque avec la zone inclinée à 30 degrés. La plaque avec la zone inclinée à 45 a l'allongement à rupture le plus important. En raisonnant en terme de section effective de la plaque, le réseau de trous non incliné a un espacement entre deux trous égal à 1 mm. À 45 degrés d'inclinaison, les trous ont un espacement plus important, égal à 1.42 mm, ce qui explique que l'allongement à rupture soit plus important. À 30 d'inclinaison, aucune ligne de trous n'existe perpendiculairement au chargement, il est compliqué de trouver une section effective. Mais si nous projetons la distance entre deux trous sur l'axe horizontal, l'espacement entre deux trous sera égal à 1.15 mm ce qui explique que la plaque ait un allongement à rupture compris entre les deux autres.

2.3.3 Corrélation d'images en grandes déformations

Durant les expériences, des champs de déformations hétérogènes doivent être capturés à cause de la microstructure du matériau. De plus, le comportement ductile très important du matériau homogène engendre d'importantes déformations en particulier autour des trous du réseau. Ces grandes déformations peuvent entraîner des problèmes de convergence de la corrélation d'images à cause d'une distorsion de certains éléments. Pour éviter ce phénomène, le gradient de déformation de ces éléments est artificiellement limité en ajoutant localement une régularisation de type Tikhonov [YAN 14]. Cette technique consiste à ajouter à la matrice de corrélation de l'élément une contribution pondérée de façon à ce que la longueur d'onde de la variation du déplacement soit localement limitée à une longueur donnée. Le formalisme est détaillé dans le travail de Leclerc [LEC 12].

Habituellement la régularisation est réalisée globalement sur les champs de déplacements calculés par corrélation d'images. Ici, nous optons pour une stratégie locale et adaptative pour les éléments dont la convergence n'est pas assurée. Un critère basé sur l'erreur de corrélation locale au niveau de l'élément est utilisé pour introduire la régularisation quand le niveau critique d'erreur est atteint. Dès qu'un élément est régularisé au cours d'un pas de la corrélation d'images, la régularisation continue de s'appliquer les pas suivants.

2.3.4 Les deux échelles de corrélation : maillages

Deux corrélations d'images sont effectuées pour chaque expérience. A l'échelle macroscopique, un élément quadrangle est utilisé pour représenter chaque cellule unitaire du matériau architecturé ignorant ainsi complètement la microstructure dans

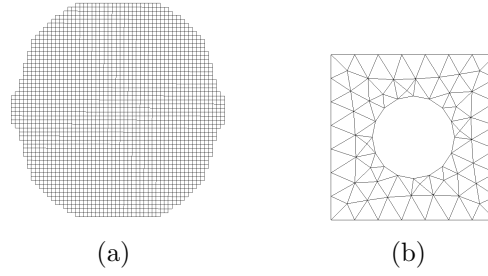


FIGURE 2.12 – (a) : maillage utilisé pour la corrélation d’images macroscopique ; (b) maillage d’une cellule unitaire utilisé pour la corrélation d’images microscopique.

le maillage comme le montre la Figure 2.12(a). Plusieurs quadrangles sont ajoutés autour de la zone architecturée. Un second maillage est réalisé à l’échelle microscopique. Le maillage d’une cellule élémentaire est représenté sur la Figure 2.12(b), celui-ci est ensuite assemblé pour toutes les cellules unitaires de la zone architecturée afin d’obtenir un maillage régulier. Quelques cellules unitaires avec la même discrétisation de maillage (mais sans trou) sont ajoutées autour de la zone architecturée pour compléter le maillage.

2.3.5 Carte des champs de déplacements et déformations

Le champ de déplacements est obtenu dans les deux directions du plan, le sens transverse et le sens longitudinal au chargement de traction. Le champ de déformations de Green-Lagrange est obtenu par dérivation du champ de déplacements. Une valeur scalaire est choisie pour la représentation du champ de déformations. Nous utilisons la mesure de von Mises. Celle-ci est égale à :

$$E_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + (E_{11}^2 - E_{33})^2 + (E_{22} - E_{33})^2 + 6(E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{23}^2)} \quad (2.5)$$

La corrélation d’images sera d’abord analysée à l’échelle macroscopique dans la Section 2.3.5.1 pour les trois orientations du réseau de trous, puis à l’échelle microscopique dans la Section 2.3.5.2. L’image analysée pour chaque expérience correspond à une déformation moyenne de la région d’intérêt (la structure architecturée plus deux cellules sans trou autour) égale à environ 20% pour les trois orientations du réseau. La déformation moyenne est identifiée comme le rapport entre l’allongement vertical de la zone d’intérêt et la longueur verticale initiale de celle-ci. Cette image est identifiée sur la Figure 2.11 à l’aide d’une droite verticale permettant de repérer le déplacement de la traverse lors de l’essai.

Les images utilisées pour la corrélation sont des images de résolution 29 millions de pixels. L’enregistrement automatique des neuf images prises à chaque instant grâce au piézo-électrique fut aléatoire au début des expériences. Les images utilisées ne sont donc pas les plus précises en terme de pixels mais leur taille est suffisante pour

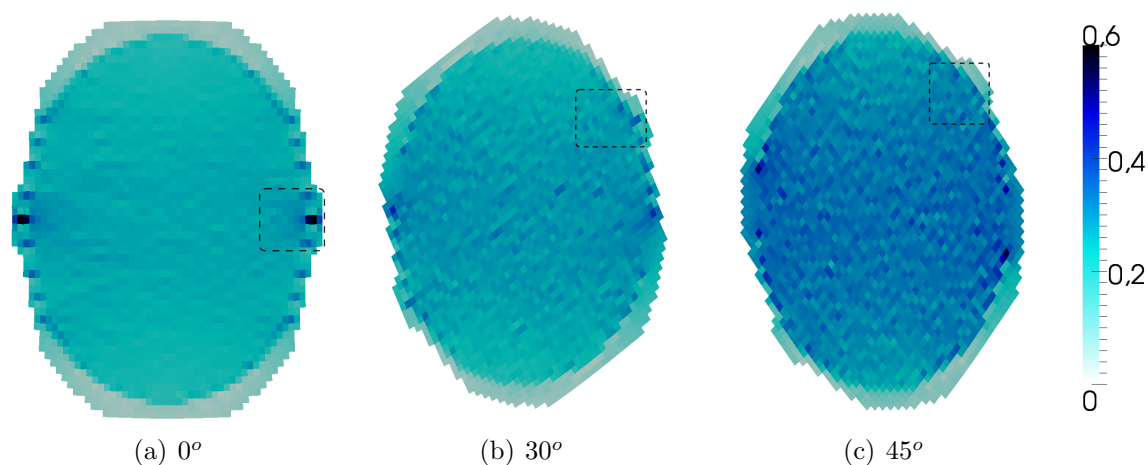


FIGURE 2.13 – Visualisation du champ de déformation scalaire au sens de von Mises de la corrélation d'images macroscopique pour les trois orientations du réseau.

mener des calculs de corrélation d'images à l'échelle microscopique. Le niveau du résidu de la corrélation présenté dans la Section 2.3.6 assure d'une bonne corrélation.

2.3.5.1 A l'échelle macroscopique

Le champ de déformation scalaire macroscopique des expériences correspondant aux trois orientations du réseau est présenté sur la Figure 2.13. Les iso-déformations de von Mises pour les réseaux inclinés de 0 degré, puis 30 degrés et enfin 45 degrés sont montrées de gauche à droite. Un zoom de la zone architecturée sera montré sur la région encadrée en pointillé pour chaque orientation du réseau : les champs de déformations à l'échelle microscopique seront détaillés sur ce zoom dans la Section 2.3.5.2.

Nous pouvons observer que la structure architecturée a une déformation plus importante que le matériau homogène qui l'entoure puisque chaque quadrangle de la zone architecturée contient un trou. Mais le fait d'utiliser un maillage ne prenant pas en compte la microstructure donne un résultat homogène en déformation pour les cellules unitaires. A 0 degrés, les deux trous excentrés de la ligne centrale horizontale se déforment un peu plus que les autres augmentant la déformation dans ces deux quadrangles.

2.3.5.2 A l'échelle microscopique

Les champs de déformation microscopique pour l'orientation du réseau à 0 degré, 30 et 45 degrés, sont respectivement tracés sur la Figure 2.14, 2.15 et 2.16. Les champs tracés regroupent les déformations transverse (E_{11}), longitudinale (E_{22}), de cisaillement (E_{12}) et la valeur scalaire (E_{VM}).

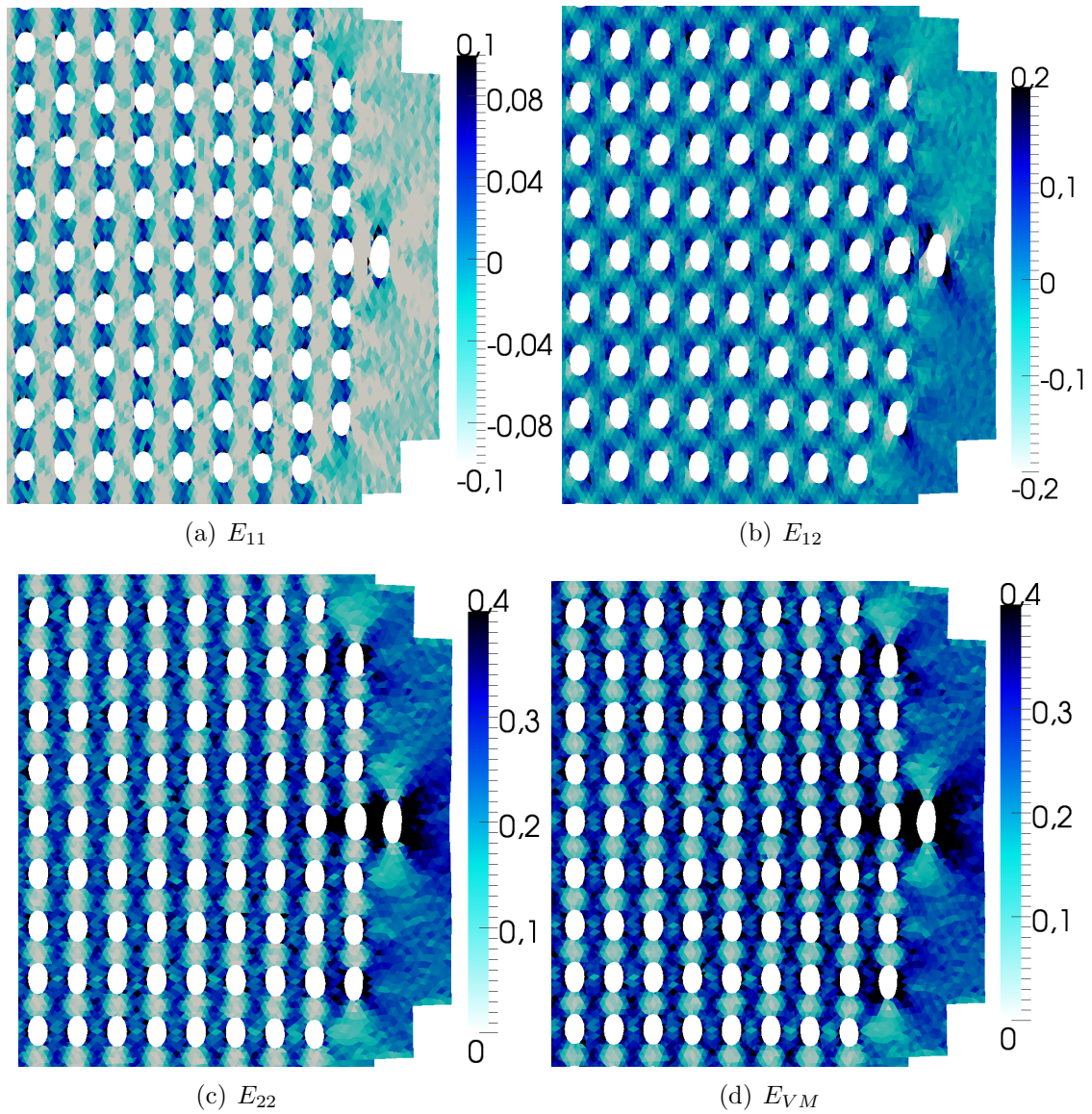


FIGURE 2.14 – Visualisation du champ de déformations obtenu par corrélation d'images microscopique pour la zone architecturée à 0 degrés : (a) E_{11} , (b) E_{12} , (c) E_{22} et (d) E_{VM}

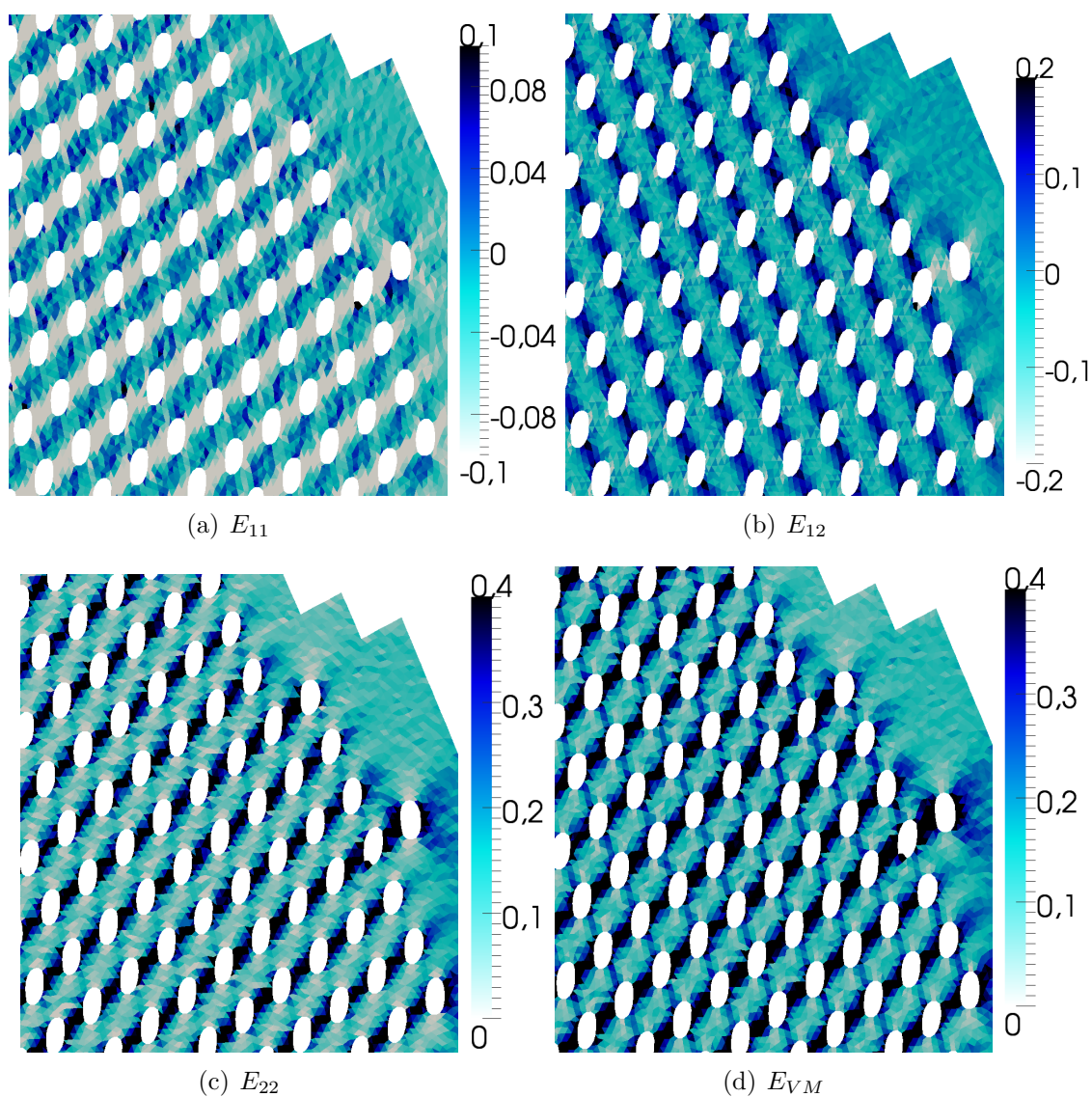


FIGURE 2.15 – Visualisation du champ de déformations obtenu par corrélation d'images microscopique pour la zone architecturée à 30 degrés : (a) E_{11} , (b) E_{12} , (c) E_{22} et (d) E_{VM}

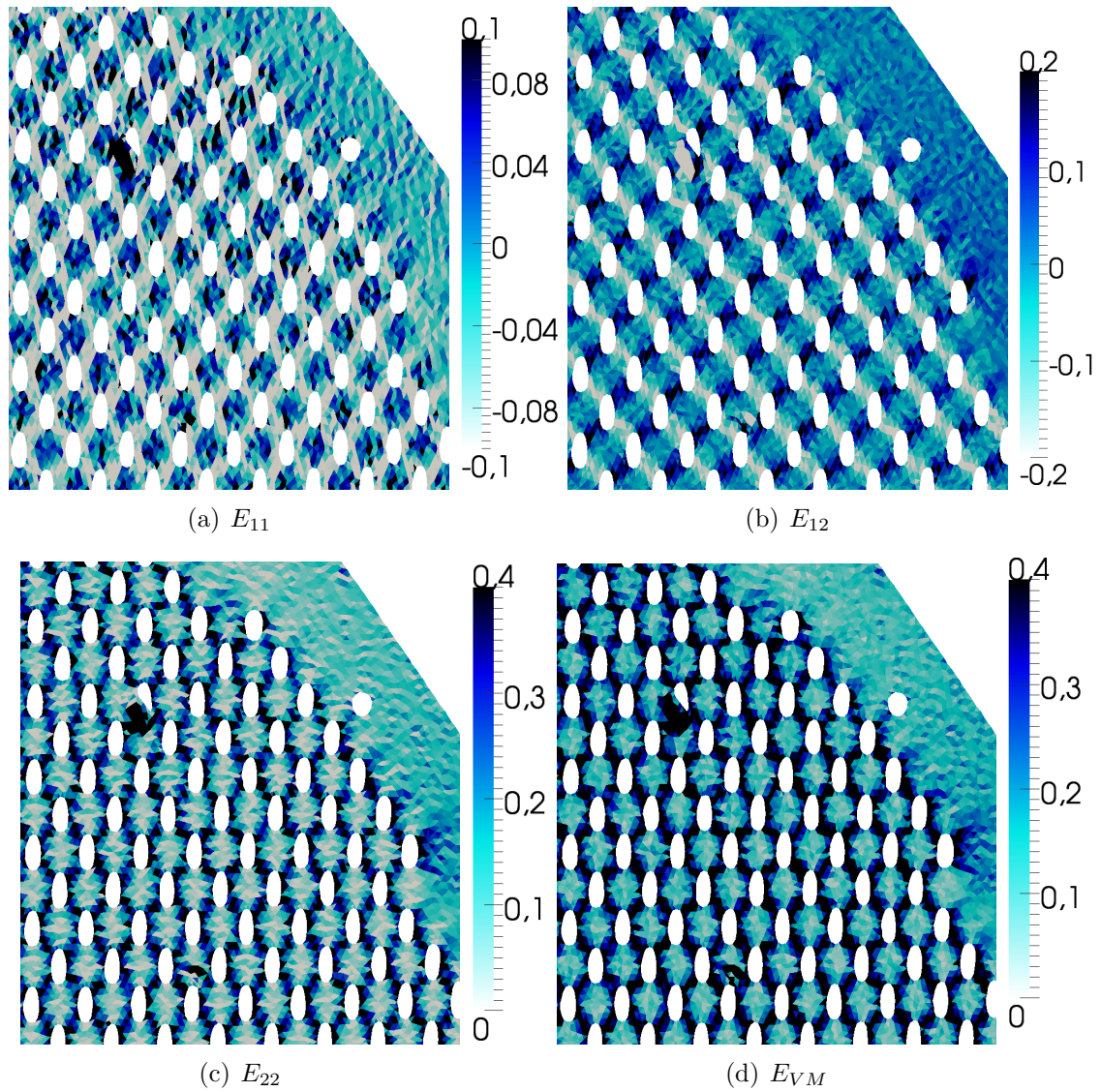


FIGURE 2.16 – Visualisation du champ de déformations obtenu par corrélation d'images microscopique pour la zone architecturée à 45 degrés : (a) E_{11} , (b) E_{12} , (c) E_{22} et (d) E_{VM}

A 0 degrés, la direction de chargement est colinéaire avec l'une des deux directions de génération du réseau de trous. Les cellules unitaires ont donc une cinématique de déformation identique. Elles sont soumises à de la traction uni-axiale verticale (E_{22} élevé, E_{11} négatif). Un effet d'écran est obtenu dans les lignes verticales du réseau, c'est à dire que la déformation est plus faible dans les zones verticales entre les trous. Au contraire, les déformations sont bien plus importantes dans les zones verticales que ne sont pas protégées par les trous. Toutes les cellules du réseau concentrent la déformation autour du trou avec une intensité dépendant de la position dans le réseau. Les cellules unitaires se déformant le plus sont les deux cellules extérieures de la ligne centrale horizontale. Ces cellules entraînent l'initiation de la fissure qui se propage ensuite vers le centre du réseau de trous et enfin vers l'extérieur en traversant le matériau homogène. Au chargement qui précède le début de la fissuration, ces deux cellules concentrent des déformations très élevées perpendiculaires au chargement, de l'ordre de 100% dans les éléments situés en périphérie du trou.

A 45 degrés, la direction de chargement est colinéaire à l'une des deux diagonales de la cellule unitaire à l'origine. La cellule unitaire se déforme en restant symétrique par rapport à la diagonale verticale. Les cellules initialement carrées se transforment en losange. Un effet d'écran des trous est observé dans les zones verticales situées entre les trous où la déformation est très faible (dans n'importe quelle direction). La déformation dans le sens de traction (E_{22}) est importante dans les zones verticales non protégées par les trous avec une déformation transverse (E_{11}) négative qui traduit la striction de la zone architecturée. La déformation de cisaillement se répartit le long des bords des cellules unitaires. Nous pouvons observer sur la Figure 2.16(b) que chaque couple de bords homologues, gauche et droit, a une déformation de cisaillement identique et de valeur opposée à l'autre couple de bords homologues, haut et bas.

A 30 degrés, la direction de chargement n'a pas de symétrie particulière pour la cellule unitaire. Les déformations obtenues dans les cellules ne sont donc plus symétriques. L'effet d'écran des trous est toujours présent avec une déformation très faible dans la zone intérieure aux trous. Les cellules se déforment principalement dans les lignes proches de l'axe horizontal entre les trous. La déformation longitudinale (E_{22}) est importante dans ces zones avec une déformation transverse négative. La déformation de cisaillement est perpendiculaire à ces zones, située dans les lignes proches de l'axe vertical entre les trous. Contrairement à l'éprouvette à 45 degrés, les bords gauche et droit des cellules subissent une déformation de cisaillement beaucoup plus importante que les bords haut et bas.

Enfin, nous observons que la distribution des déformations des cellules unitaires semble assez similaire pour les trois orientations du réseau. Seules les cellules situées à la frontière du matériau homogène paraissent subir des déformations différentes.

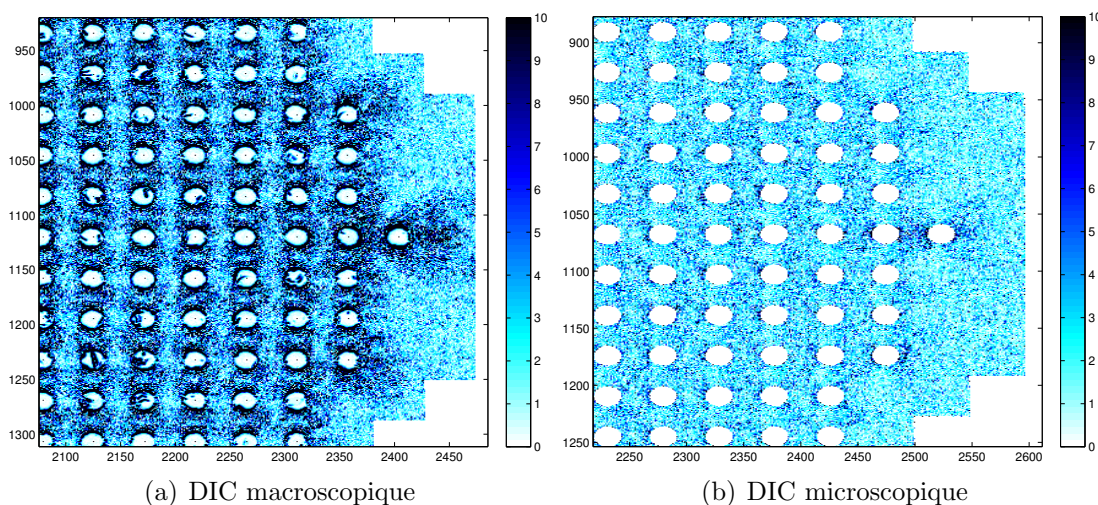


FIGURE 2.17 – Visualisation du champ d’erreur de la corrélation d’images macroscopique (a) et microscopique (b) pour le réseau non incliné en niveaux de gris. La dynamique totale de l’image est $[0\ 255]$ en niveaux de gris.

2.3.6 Résidu de la corrélation d’images

Le résidu de la corrélation d’images est défini comme la différence de niveau de gris entre l’image de référence et l’image déformée sur laquelle est pris en compte le champ de déplacement calculé :

$$| f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}) | \quad (2.6)$$

Ce champ est tracé à chaque pixel de l’image de référence et est obtenu par interpolation des valeurs de résidu aux éléments finis sur le champ de pixels de l’image. Les champs du résidu des corrélations d’images macroscopique et microscopique du réseau incliné à 0 degré, 30 et 45 degrés, sont respectivement tracés sur la Figure 2.17, 2.18 et 2.19. Les niveaux de gris de l’image ont une dynamique de $[0\ 255]$ (8 bits). Le champ du résidu est quant à lui tracé sur l’intervalle en pixels $[0\ 10]$.

Pour les deux types de corrélations d’images (microscopique et macroscopique), le résidu est le plus élevé autour des trous du réseau. En effet, les déformations les plus importantes se concentrent à ces endroits pour les trois orientations du réseau. Nous pouvons remarquer que le résidu est plus faible dans le cas de la corrélation d’images microscopique que dans le cas macroscopique. A l’échelle microscopique, la microstructure est maillée ce qui permet de prendre en compte les déformations hétérogènes par rapport à la corrélation macroscopique globale pour chaque cellule unitaire. Les imperfections du mouchetis (tâches de peinture trop grossières) entraînant des problèmes de corrélation d’images sont visibles sur la carte du résidu microscopique. Dans la zone d’intérêt complète, la valeur moyenne du résidu est assez similaire (7 et 8 en niveaux de gris pour la corrélation d’images microscopique et

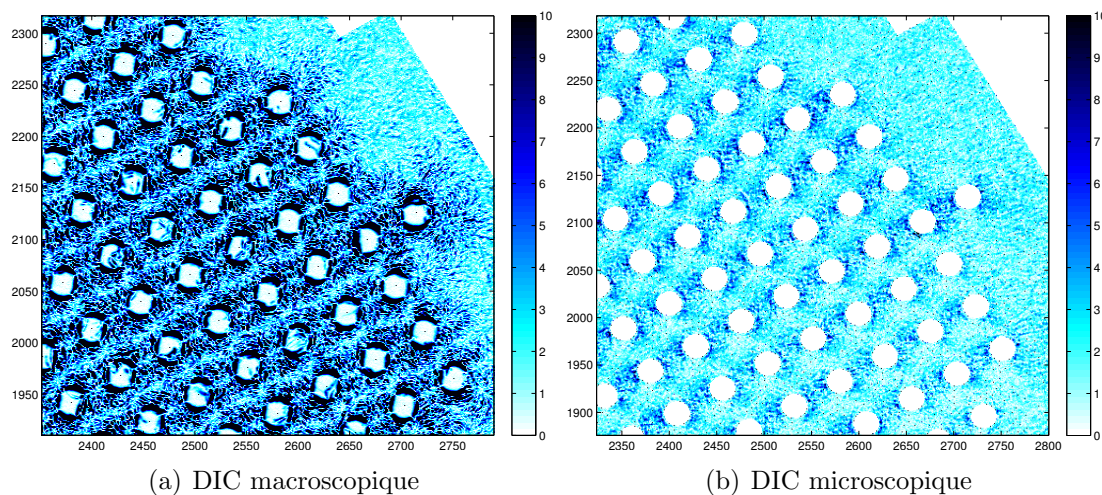


FIGURE 2.18 – Visualisation du champ d'erreur de la corrélation d'images macroscopique (a) et microscopique (b) pour le réseau incliné à 30 degrés en niveaux de gris. La dynamique totale de l'image est $[0\ 255]$ en niveaux de gris.

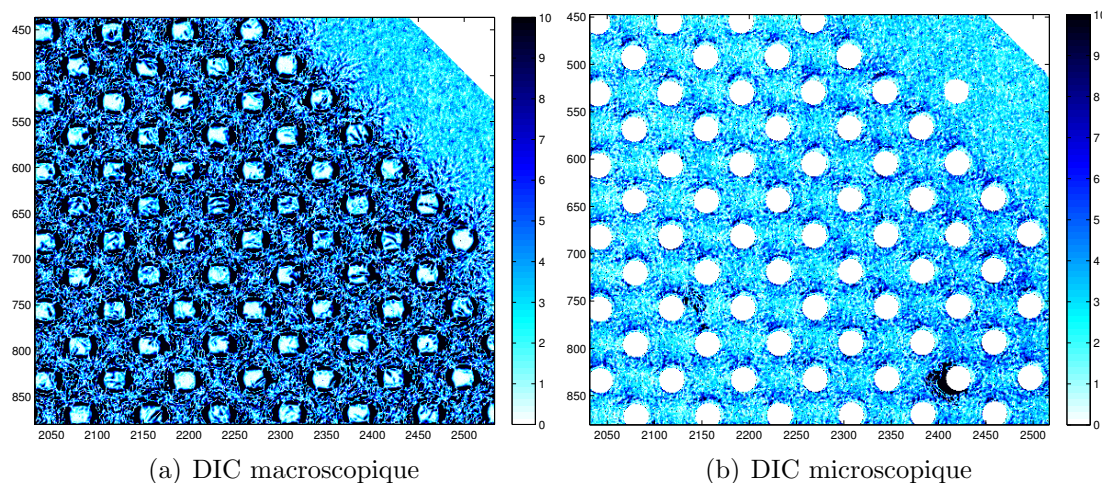


FIGURE 2.19 – Visualisation du champ d'erreur de la corrélation d'images macroscopique (a) et microscopique (b) pour le réseau incliné à 45 degrés en niveaux de gris. La dynamique totale de l'image est $[0\ 255]$ en niveaux de gris.

macroscopique). Cette valeur dans le cas de la corrélation macroscopique s'explique par le fait que le résidu dans les trous est très faible ce qui diminue très fortement la moyenne.

2.4 Synthèse

Une étude de pré-dimensionnement a été effectuée pour définir la géométrie de la zone architecturée des éprouvettes dans la Section 2.2. L'orientation du réseau de trous par rapport à la direction de chargement permet de soumettre les cellules unitaires à différentes sollicitations et d'introduire du cisaillement dans les réseaux de trous inclinés. Une étude sur les cinématiques de déformation aux échelles macroscopique et microscopique nous ont fait choisir trois orientations du réseau (0, 30 et 45 degrés) de la zone architecturée circulaire.

Les résultats de la corrélation d'images des éprouvettes réalisées sont présentées dans la Section 2.3. Une caméra à très haute résolution a été utilisée afin d'obtenir les champs de déplacements et déformations à la fois à l'échelle microscopique et macroscopique. Une régularisation, dite de Tikhonov, a été ajoutée à la corrélation d'images pour l'étude des grandes déformations. Cette régularisation permet d'éviter une distorsion trop importante des éléments pouvant mener à une solution erronée.

Les résultats de la corrélation d'images sont donnés pour une déformation moyenne de la zone d'intérêt égale à 20%. Les déformations locales atteignent 100% aux alentours de certains trous du réseau microscopique. La corrélation d'images donne néanmoins de très bons résultats avec un résidu atteignant localement 10 niveaux de gris d'erreur avant l'apparition de la localisation des déformations et la fissuration de la zone architecturée. Enfin, grâce à la résolution de la caméra, les déplacements et déformations de chaque cellule unitaire sont obtenus sur un maillage régulier.

Ce travail fournit donc une base de données très détaillée sur la cinématique de déformations des cellules à l'échelle microscopique aussi bien que macroscopique. Nous pourrions donc utiliser ces résultats comme données pour réfléchir aux méthodes pertinentes pour faire des changements d'échelle de matériaux hétérogènes. Ces méthodes pourront être testées aussi bien en élasticité qu'en plasticité étendue et jusqu'à la rupture.

Chapitre 3

Cinématique de déformation non-linéaire des cellules unitaires

Ce chapitre étudie les cinématiques de déformation du contour des cellules unitaires grâce à une corrélation d'images à l'échelle microscopique. La première section projette le champ des déplacements sur une base polynomiale de degré 3 pour tenir compte des sollicitations mixtes en traction et cisaillement. Une analyse statistique des paramètres permet de distinguer des cellules avec une réponse périodique et des cellules avec une réponse non périodique. Dans la seconde section, quatre cellules unitaires sont choisies : la première a une cinématique périodique, les trois autres montrent chacune une cinématique non périodique différente. Plusieurs schémas d'homogénéisation d'ordre supérieur sont ensuite appliqués sur ces cellules pour comparer les conditions aux limites associées aux observations expérimentales.

Sommaire

3.1	Introduction	63
3.2	Analyse de la périodicité	63
3.2.1	Déformation de la cellule centrale	63
3.2.2	Étude expérimentale de la périodicité des cellules unitaires .	67
3.2.3	Zone de transition	69
3.2.4	Comparaison du gradient microscopique au gradient macroscopique	71
3.2.5	Bilan	72
3.3	Simulation des conditions aux limites d'ordre supérieur . .	73
3.3.1	Différents types de conditions aux limites en déplacement . .	74
3.3.2	Étude des effets des conditions aux limites d'ordre supérieures sur la réponse des cellules unitaires	77
3.3.3	Cellule unitaire périodique idéale	80
3.3.4	Cellules unitaires du bord	82
3.3.5	Conclusion sur l'intérêt du milieu du second-ordre	88
3.4	Synthèse	89

3.1 Introduction

Une étude expérimentale sur des plaques percées avec un réseau de trous a été réalisée par corrélation d'images. L'utilisation d'une caméra haute résolution nous a permis d'obtenir le champ de déplacements du matériau hétérogène à l'échelle microscopique dans une large plage de déformations plastiques. Les cellules unitaires ont été soumises à diverses sollicitations en traction et cisaillement grâce à l'inclinaison du réseau de trous de la zone architecturée.

La Section 1.1.2 a montré l'effet significatif du choix des conditions aux limites sur les caractéristiques du matériau homogène équivalent. Dans le cas considéré, la cellule unitaire est considérée comme le VER même si il ne respecte pas toutes les conditions de définition (une grande longueur devant la taille de l'hétérogénéité). Avec l'application de conditions aux limites périodiques sur la cellule, les propriétés du MHE restent inchangées quelque soit la taille du VER. Pour utiliser cette propriété, nous allons donc nous attacher à chercher les régions du réseau de trous où les cellules unitaires ont une réponse périodique et les zones où cette propriété n'est pas vérifiée. Pour les cellules périodiques, un calcul d'homogénéisation avec des conditions aux limites périodiques donnera les propriétés effectives du MHE. Pour les cellules non périodiques, nous allons alors chercher à vérifier quelle théorie doit être appliquée pour définir les conditions aux limites adéquates sur le bord des cellules.

Dans la section 3.2, une étude statistique sur le champ de déplacements des bords de chaque cellule unitaire est menée pour caractériser leur cinématique de déformation et mettre en évidence les cellules qui n'ont pas une cinématique périodique. La Section 3.3 compare quatre schémas d'homogénéisation d'ordre supérieur. Nous proposons alors de conclure quant à leur pertinence pour les cellules ayant une réponse non périodique.

3.2 Analyse de la périodicité

3.2.1 Déformation de la cellule centrale

Pour analyser la périodicité des cellules, nous commençons par regarder la déformation de la cellule unitaire centrale qui par définition doit avoir une réponse périodique. Le déplacement du contour de la cellule unitaire centrale obtenu par corrélation d'images microscopique et macroscopique pour les trois orientations de la zone architecturée est représenté sur la Figure 3.1. La position initiale du contour de la cellule unitaire est tracée en rouge. Le contour macroscopique, en bleu, est défini par la position des quatre sommets de la cellule déformée et interpolé linéairement entre ces points. A l'échelle microscopique, dont le contour est tracé en noir, huit nœuds par côté sont utilisés pour décrire la déformation du contour de la cellule.

Remarquons que la variation de l'inclinaison de la structure architecturée modifie les sollicitations subies par la cellule unitaire. Quand le réseau de trous n'est pas

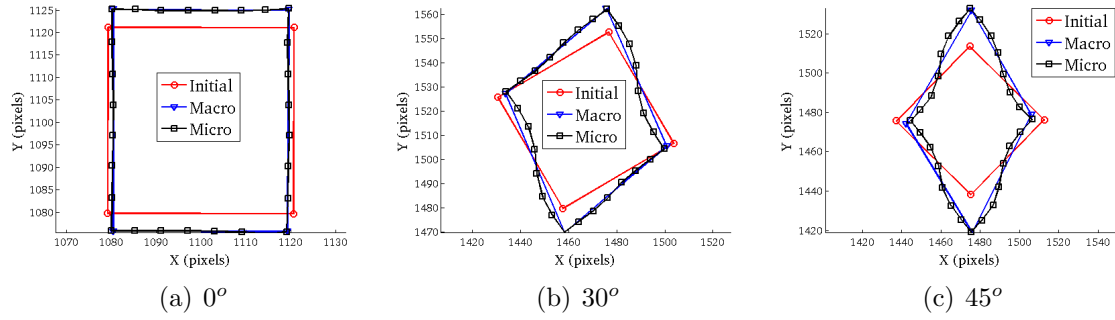


FIGURE 3.1 – Déformation du contour de la cellule unitaire centrale pour les trois orientations du réseau. En rouge, le contour initial est comparé au contour obtenu par corrélation d’images macroscopique (bleu) et microscopique (noir).

incliné, la cellule subit une traction uniaxiale de même direction que le chargement. Incliner le réseau de trous ajoute une sollicitation en cisaillement aux cellules unitaires. Quand l’inclinaison du réseau est de 45 degrés, la cellule est symétrique par rapport à la direction de chargement. Dans ce cas, la déformée de la cellule centrale conserve cette symétrie avec la déformation (Figure 3.1(c)).

3.2.1.1 Identification du contour

Notre but est d’étudier la périodicité des cellules unitaires. Pour cela, nous paramétrons chaque bord de cellule pour comparer ses déplacements avec son bord homologue. Le déplacement de chacun des bords d’une cellule est projeté sur une base polynomiale de degré 3. Le degré 3 est choisi pour prendre en compte les cinématiques plus riches obtenues quand le chargement est mixte en traction et cisaillement. Les mouvements de corps rigides sont supprimés avant la projection sur cette base. Le déplacement normal au bord est paramétré par l’abscisse curviligne s du bord :

$$u_n = a_i + b_i.s + c_i.s^2 + d_i.s^3 \quad (3.1)$$

où l’indice $i \in [h, g, b, d]$ représente l’indice du bord considéré de la cellule (respectivement le bord haut, gauche, bas et droit). La variation de l’abscisse curviligne a été ramené à l’intervalle $[-1, 1]$. Les quatre paramètres sont obtenus par une minimisation au sens des moindres carrés de l’écart entre le déplacement expérimental et la base proposée. Nous réalisons ainsi une projection du champ expérimental de chaque bord sur une base polynomiale de degré 3.

3.2.1.2 Analyse des paramètres identifiés

Nous menons une analyse statistique des paramètres du déplacement pour déterminer les cellules unitaires ayant une réponse périodique. L’évolution de la

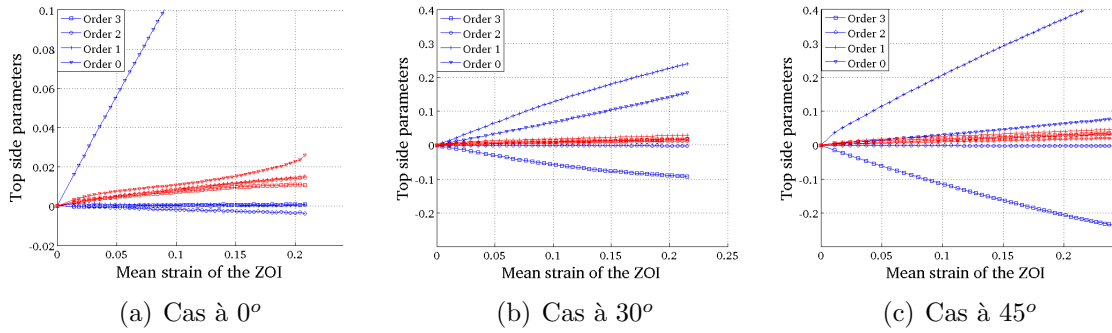


FIGURE 3.2 – Évolution des quatre paramètres (a_h , b_h , c_h and d_h) de la projection du déplacement normal pour le bord haut des cellules unitaires pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude.

moyenne et de l'écart-type des quatre paramètres du bord haut et du bord droit des cellules unitaires pour chacune des orientations du réseau est respectivement tracée sur la Figure 3.2, 3.3, en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude.

Dans le cas où le réseau de trous est aligné avec la direction de chargement (cas O degré), les cellules unitaires sont principalement chargées en traction uni-axiale. Sur la Figure 3.2(a), la moyenne du paramètre d'ordre 0 (a_h) du bord haut des cellules unitaires est prépondérante devant les trois autres ordres. Seul le paramètre d'ordre 2 (c_h) a une moyenne non nulle ce qui indique une légère déformation parabolique du bord haut des cellules unitaires. La moyenne du paramètre d'ordre 0 (a_d) du bord droit est prépondérante devant celle des autres ordres comme le montre la Figure 3.3(a). Celle-ci correspond à l'effet Poisson du à la traction que subissent les cellules. Lorsque le réseau est incliné, les cellules unitaires sont sollicitées en traction et cisaillement.

A 45 degrés d'inclinaison, la moyenne des quatre coefficients est la même sur les bords droit et haut des cellules comme le montre les Figures 3.2(c) et 3.3(c). En effet, la direction de chargement correspond à une des diagonales de la cellule initiale, ce qui fait que les bords ont la même cinématique de déformation. De plus, la cellule unitaire est un carré et se déforme en forme de losange avec les diagonales qui ne changent pas d'orientation. Cet effet se traduit par une valeur importante de la moyenne du paramètre d'ordre 1 (b_i), reflétant cette rotation des bords. Nous pouvons remarquer que la moyenne du paramètre d'ordre 3 (d_i) est plus importante (en valeur absolue) que celle du paramètre d'ordre 2 (c_i). Cela correspond à la sollicitation de cisaillement que subissent les cellules.

Pour l'inclinaison du réseau de 30 degrés, les cellules sont soumises à un chargement mixte qui diffère suivant les bords comme le montre les Figures 3.2(b) et 3.3(b). L'inclinaison du réseau ne se trouvant pas sur un axe de symétrie des cellules im-

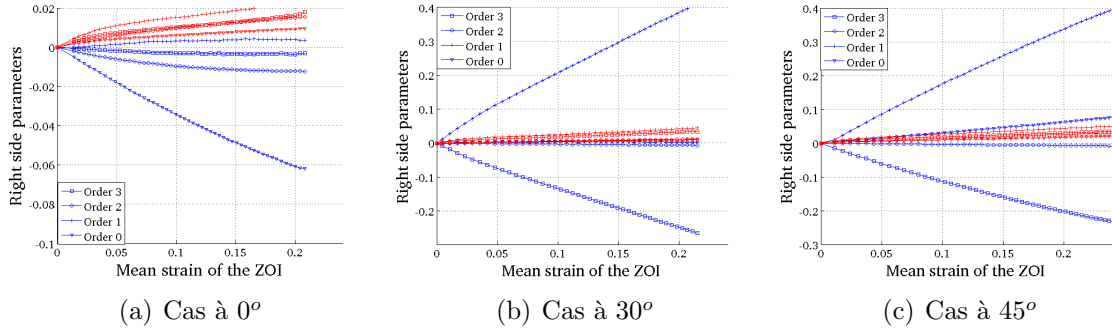


FIGURE 3.3 – Évolution des quatre paramètres (a_d , b_d , c_d and d_d) de la projection du déplacement normal pour le bord droit des cellules unitaires pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude.

plique une déformation différente des bords de cellule. Sur la Figure 3.1(b), nous pouvons remarquer que les bords droit et gauche ont une déformation due au cisaillement plus prononcée que les bords haut et bas. Cela est bien traduit par la moyenne du paramètre d'ordre 3 (d_i) plus importante (en valeur absolue) du bord droit que pour le bord haut. Le chargement en traction est quant à lui répercuté sur les bords hauts et bas des cellules où la moyenne du paramètre d'ordre 0 (a_h) est non nulle. Cet effet implique aussi une rotation différente des bords, supérieure pour les bords gauche et droit par rapport aux bords haut et bas comme le montre la moyenne du paramètre d'ordre 1 (b_i).

Il est à noter que l'écart-type des paramètres n'est pas nul. En effet, lorsque la moyenne d'un paramètre est pratiquement nulle, son écart-type est supérieur à cette valeur ce qui implique une grande dispersion dans les valeurs des paramètres représentant la déformation des bords des cellules unitaires. Toutes les cellules unitaires n'ont donc pas la même cinématique de déformation, puisque selon leur position dans le réseau, celle-ci peut varier.

3.2.1.3 Conditions aux limites périodiques usuelles

Grâce à la projection sur la base polynomiale choisie du déplacement des bords des cellules, nous pouvons étudier la périodicité des cellules. Nous nous limitons à la périodicité du premier ordre usuelle, c'est-à-dire que les bords homologues doivent se déformer de la même manière. Le déplacement d'un bord à l'échelle microscopique s'écrit en fonction du gradient de la transformation macroscopique \mathbf{F}^M et d'un champ microscopique inconnu périodique \mathbf{w} :

$$\mathbf{u}^m = \mathbf{F}^M \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w}. \quad (3.2)$$

Le champ \mathbf{w} étant périodique, deux points homologues A et B sont liés par la relation : $\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_B$. Il s'en suit que la condition de périodicité pour deux points homologues, par exemple pour un couple de points des bords gauche et droit, est égale à :

$$\mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m = \mathbf{F}^M(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_g) + (\mathbf{w}_d - \mathbf{w}_g) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m = \mathbf{F}^M(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_g) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m = L\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_d \quad (3.5)$$

où L est la longueur de la cellule unitaire et \mathbf{N}_d la normale unitaire au bord droit. Une relation similaire est déterminée entre les déplacements des bords haut et bas de la cellule unitaire. A partir de la projection sur la base, nous calculons de la même manière la relation de périodicité provenant de l'Équation (3.1) :

$$\mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m = (a_d - a_g) + (b_d - b_g).s + (c_d - c_g).s^2 + (d_d - d_g).s^3 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{u}_h^m - \mathbf{u}_b^m = (a_h - a_b) + (b_h - b_b).s + (c_h - c_b).s^2 + (d_h - d_b).s^3 \quad (3.7)$$

Pour que deux bords homologues vérifient ainsi la condition de périodicité, les coefficients des termes de degrés 1, 2 et 3 en s doivent être nuls.

3.2.2 Étude expérimentale de la périodicité des cellules unitaires

L'évolution de la différence des quatre paramètres en fonction de la déformation moyenne pour les bords homologues haut/bas et pour les bords droit/gauche est respectivement tracée sur la Figure 3.4, 3.5. Comme précédemment (et pour toutes les figures suivantes), la moyenne est tracée en bleue et l'écart-type en rouge sur toutes les cellules unitaires.

Pour les bords haut/bas, la différence des paramètres d'ordre 0 ($a_h - a_b$) est prédominante devant celle des autres ordres. Pour les trois autres ordres, la valeur moyenne est du même ordre de grandeur que leur écart-type ce qui signifie que nous ne pouvons pas conclure pertinemment sur la périodicité de ces bords. Pour les bords gauche et droit, nous obtenons les mêmes résultats à l'exception du cas à 30 degrés où les quatre termes ont une moyenne négligeable.

Cette analyse confirme que la déformation des cellules élémentaires est due à un gradient macroscopique constant et à un champ de déplacement périodique prenant en compte les effets microscopiques. Ce résultat est confirmé expérimentalement grâce à la corrélation d'images microscopique, il s'étend ici au cas des déformations plastiques significatives.

Recherche des cellules non périodiques : A cause de la grande variabilité des résultats montrée par l'écart-type, nous choisissons de supprimer de l'analyse les cellules ayant une cinématique non périodique afin de calculer une nouvelle moyenne et

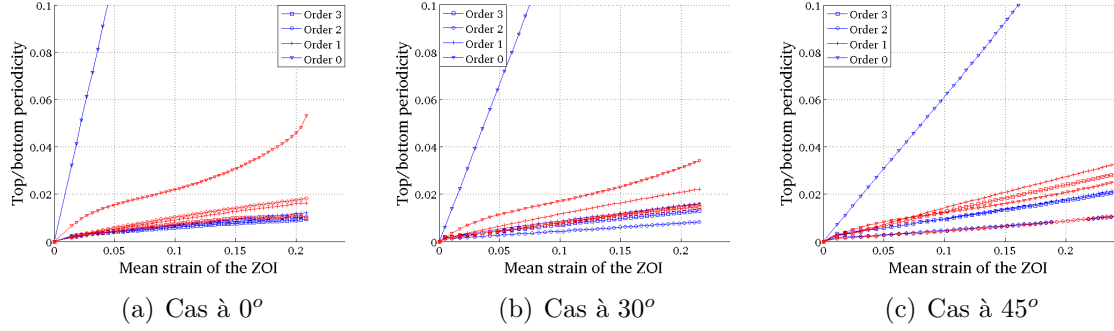


FIGURE 3.4 – Évolution de la périodicité entre les bords haut/bas des quatre paramètres (a , b , c et d) pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude.

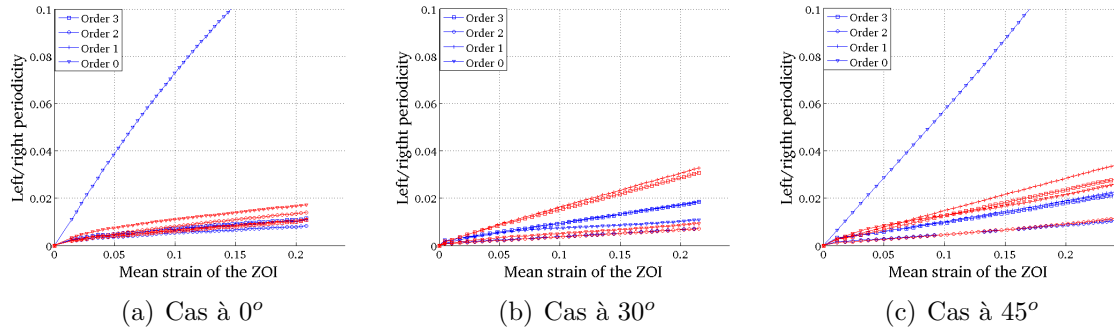


FIGURE 3.5 – Évolution de la périodicité entre les bords gauche/droite des quatre paramètres (a , b , c et d) pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude.

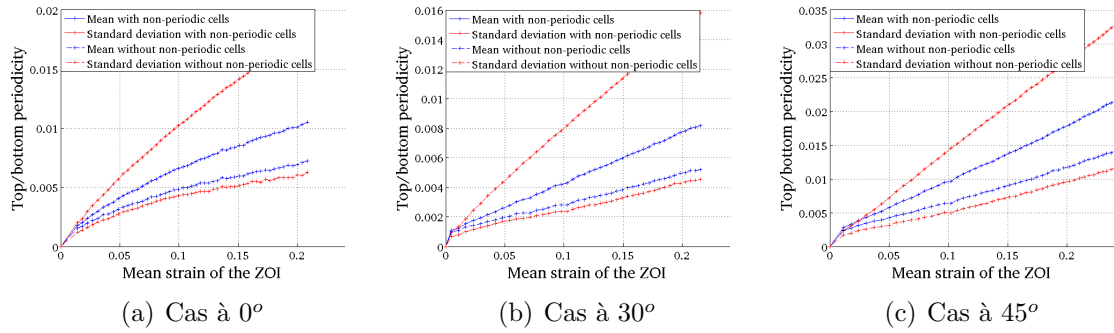


FIGURE 3.6 – Évolution de la périodicité entre les bords haut/bas des quatre paramètres (a , b , c et d) pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude. Les nouvelles valeurs sont tracées en pointillés.

un nouvel écart-type. Pour cela, nous décidons de supprimer de l'analyse les cellules unitaires ayant un des trois termes (ordre 1, 2 ou 3) reflétant la périodicité en dehors de l'intervalle [moyenne $\pm 1.5 \times$ écart-type] définis par les Figures 3.4 et 3.5. La nouvelle moyenne et le nouvel écart-type calculés pour les bords homologues haut/bas et pour les bords droit/gauche sont respectivement tracés sur la Figure 3.6, 3.7.

Pour chaque orientation du réseau, le choix d'un seul terme reflétant la périodicité (de degré 1 ($b_h - b_b$), 2 ($c_h - c_b$) ou 3 ($d_h - d_b$)) est fait par souci de clarté des images. Le résultat est analogue pour les deux degrés manquants. La suppression des cellules avec une réponse non périodique diminue d'un facteur 2.5 à 4 l'écart-type des termes reflétant la périodicité. La valeur moyenne diminue nettement moins (rapport compris entre 1.3 et 1.6). Ainsi l'écart-type devient inférieur à la moyenne pour toutes les orientations du réseau et pour l'ensemble des deux couples de bords homologues. Nous pouvons donc en conclure que les cellules unitaires ainsi choisies ont une cinématique périodique.

3.2.3 Zone de transition

Les cellules unitaires éliminées de l'analyse précédente sont pointées en bleu sur la Figure 3.8 où chaque quadrangle représente une cellule unitaire. Ces cellules unitaires ont une cinématique non périodique pour au moins un des deux couples de bords homologues (droit/gauche ou haut/bas).

Certaines cellules unitaires apparaissent à l'intérieur du réseau de trous sur la Figure 3.8. La cinématique non périodique de ces cellules est due aux erreurs de la corrélation d'images (mouchetis trop grossier par endroit). Toutes les autres cellules unitaires ayant une cinématique non périodique se trouvent dans la zone de transition entre le matériau hétérogène et le matériau homogène. L'épaisseur de cette zone de

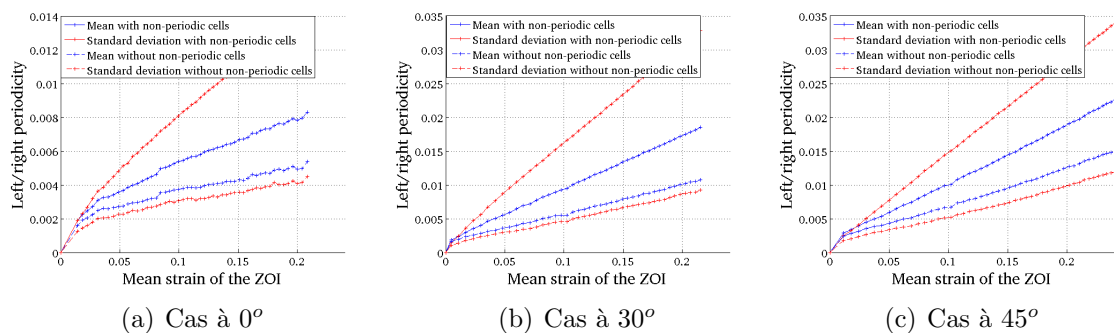


FIGURE 3.7 – Évolution de la périodicité entre les bords gauche/droite des quatre paramètres (a , b , c et d) pour les trois orientations du réseau. La valeur moyenne (courbe bleue) et l'écart-type (en rouge) sont tracés en fonction de la déformation moyenne de la région d'étude. Les nouvelles valeurs sont tracées en pointillés.

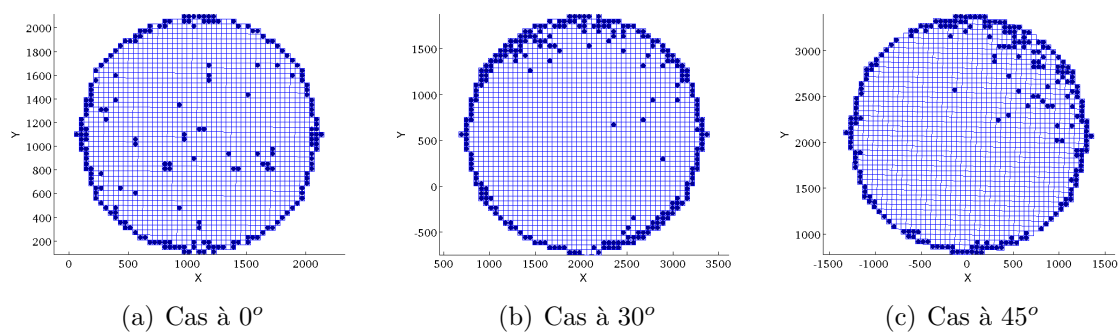


FIGURE 3.8 – Les cellules unitaires avec une cinématique non périodique (entre les bords haut/bas et gauche/droite) sont pointées dans la zone architecturée pour les trois orientations du réseau.

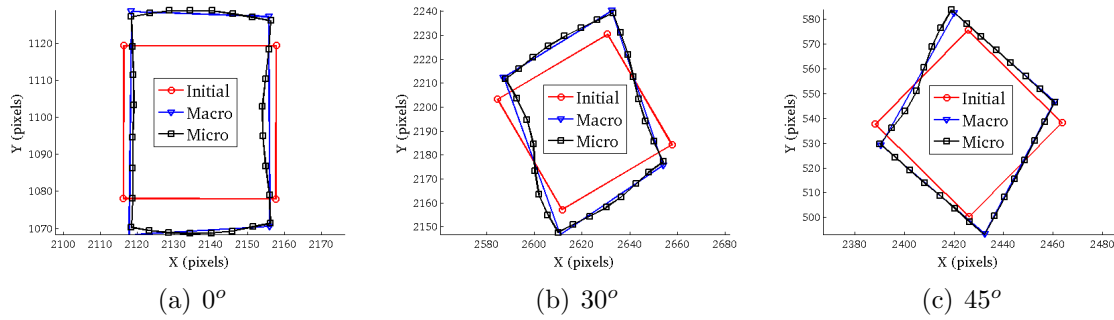


FIGURE 3.9 – Déformation du contour de la cellule unitaire placée au milieu à droite de la zone architecturée pour les trois orientations du réseau. Le contour initial, en rouge, est comparé au contour obtenu par DIC macroscopique (bleu) et microscopique (noir).

transition est d'une cellule unitaire environ.

La déformation de la cellule unitaire placée au milieu à droite de la zone architecturée du réseau à 0 degré est représentée sur la Figure 3.9. Cette cellule a une réponse non périodique. Remarquons que son bord gauche est lié à la zone architecturée alors que les trois autres bords sont liés au matériau homogène. Si l'on compare la Figure 3.8 avec la Figure 3.1, les déformations de la cellule unitaire sont complètement différentes. Cette cellule est principalement chargée en traction. Alors qu'avec l'inclinaison du réseau (à 30 et 45 degrés), les cellules du centre ont un important chargement en cisaillement, ici seul le bord gauche de la cellule conserve l'effet du cisaillement. A 0 degré, la cellule est toujours soumise à une traction uniaxiale mais le fait qu'elle soit entourée du matériau homogène fait ressortir l'effet du coefficient de Poisson sur les bords haut, droit et gauche où le trou accentue la distorsion des bords.

3.2.4 Comparaison du gradient microscopique au gradient macroscopique

Dans le cas où le réseau n'est pas incliné, la direction du chargement correspond à la normale aux bords haut et bas. Ainsi une mesure microscopique des termes diagonaux du gradient de la transformation peut être obtenue simplement grâce à la projection sur la base polynomiale (l'abscisse curviligne varie entre -1 et 1). Nous avons donc :

$$\epsilon_{11}^m = \frac{a_d - a_g}{2} \quad \text{and} \quad \epsilon_{22}^m = \frac{a_h - a_b}{2} \quad (3.8)$$

où ϵ_{11}^m et ϵ_{22}^m sont les composantes transverse et longitudinale par rapport à la direction de chargement verticale du gradient de la transformation. D'autre part, la corrélation d'images à l'échelle macroscopique pour laquelle une cellule élémentaire

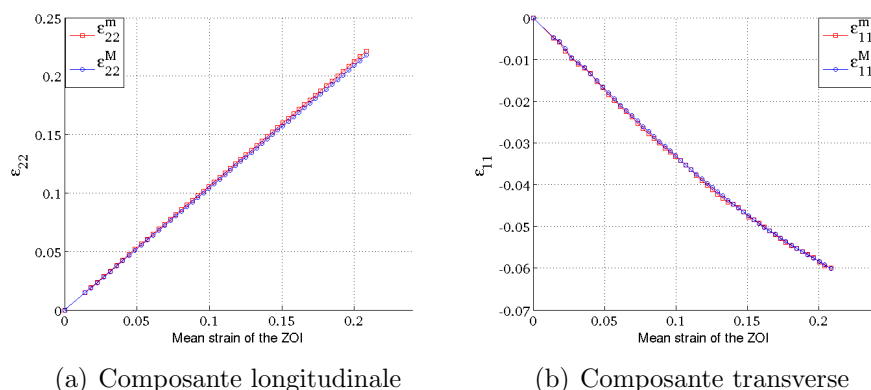


FIGURE 3.10 – Comparaison des déformations mesurées directement par la DIC macroscopique (courbe bleue) et les déformations calculées à partir de l’analyse des déformations du contour des cellules unitaires par DIC microscopique (courbe rouge). La composante longitudinale du tenseur des déformations (le long du chargement) et la composante transverse (orthogonale au chargement) sont tracées en fonction de la déformation moyenne de la région d’étude.

est représentée par un quadrangle nous donne aussi une estimation de ces deux mêmes composantes du gradient de la transformation. La comparaison de ces composantes est présentée sur la Figure 3.10.

Ces deux approches de la mesure du tenseur du gradient de la transformation macroscopique donnent des résultats très proches. Une erreur de 1,5% est obtenue en moyenne au cours de la déformation de la région d’étude. Ainsi les déformations macroscopiques calculées à partir du déplacement microscopique expérimental sont en accord avec une mesure directe de la déformation macroscopique.

3.2.5 Bilan

Nous calculons le déplacement du contour de chaque cellule unitaire grâce au déplacement extrait de la corrélation d’images à l’échelle microscopique. Pour chaque bord de chaque cellule unitaire nous projetons ce déplacement sur une base polynomiale de degré 3. Une étude statistique est alors menée sur ces paramètres pour caractériser la réponse périodique des cellules unitaires. Il a été montré que les cellules qui n’ont pas une cinématique périodique sont les cellules de la zone de transition entre le matériau hétérogène et homogène. Dans le cas de notre structure architecturée (une plaque percée avec des trous) la zone de transition se limite à une couronne d’épaisseur une seule cellule unitaire environ. Cette analyse a été menée pour des déformations plastiques allant jusqu’à l’apparition d’une fissure et sous diverses sollicitations de la cellule unitaire combinant traction et cisaillement.

Dans notre cas, la zone de transition a une largeur très faible : une cellule uni-

taire environ. Le second matériau de la plaque, le vide, est un matériau infiniment souple. Pour les cellules de la zone de transition, les bords en contact avec le matériau homogène ont une déformation particulière liée à l'orientation du réseau de trous. Comme le trou autorise une grande déformation locale, les bords en contact avec l'intérieur de la zone architecturée se déforment comme l'intérieur de la zone architecturée. Au contraire si le trou avait contenu un matériau infiniment rigide alors la déformation locale des trous aurait été faible et les bords en contact avec la zone architecturée auraient conservé une partie de la déformation venant du matériau homogène sur la seconde couronne extérieure et ainsi de suite jusqu'à disparition de l'effet.

Le déplacement du contour des cellules unitaires de la zone de transition est non périodique. Dans les schémas d'homogénéisation, l'application de conditions aux limites cinématiques linéaire ou périodique usuelles ne sera donc pas suffisant pour imposer ces déformations sur le contour. Nous allons maintenant suivre les démarches de Kouznetsova, Kaczmarczyk ou Forest [KOU 04, KAC 08, FOR 11] et utiliser des conditions aux limites d'ordre supérieur en enrichissant le milieu macroscopique. Nous construisons quatre schémas d'homogénéisation pour chercher quelles conditions aux limites doivent être appliquées sur les cellules de la zone de transition.

3.3 Simulation des conditions aux limites d'ordre supérieur

Cette section s'intéresse à la définition des conditions aux limites pour des schémas d'homogénéisation d'ordre supérieur. La corrélation d'images microscopique donne le résultat expérimental de la déformation des cellules. Avec ces déformations, les tenseurs de déformation macroscopiques (premier ordre et second ordre) sont calculés. Les conditions aux limites des schémas d'homogénéisation périodique du premier et du second ordre et des schémas d'homogénéisation cinématique du deuxième et du troisième ordre sont calculées à partir de ces tenseurs de déformations expérimentaux. Ces conditions sont ensuite appliquées avec une simulation numérique sur les cellules unitaires et le résultat est comparé au contour expérimental calculé avec la corrélation d'images.

Le résultat expérimental utilisé pour cette étude est le déplacement obtenu au dernier pas de la corrélation d'images effectuée. Ce déplacement correspond donc à une déformation moyenne du réseau de trous d'environ 21% pour l'inclinaison de 0° , 23% pour l'inclinaison de 30° et 24% pour l'inclinaison à 45° . Une projection du déplacement expérimental sur une base polynomiale permet d'extraire les tenseurs de la transformation macroscopique servant à imposer les conditions aux limites d'ordre supérieur.

Parmi toutes les cellules unitaires, une cellule avec une cinématique périodique et trois cellules non périodiques sont extraites dans la Section 3.3.3. La cellule

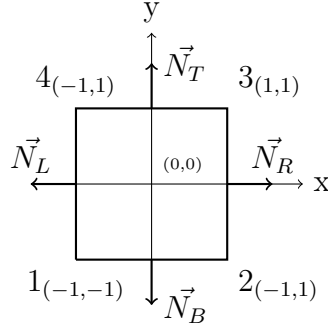


FIGURE 3.11 – Représentation schématique de la cellule unitaire non déformée pour l'identification des tenseur \mathbf{F} and \mathbf{G} .

périodique permet d'examiner l'intérêt d'un schéma d'homogénéisation périodique du second ordre par rapport au schéma du premier ordre. Cette comparaison se fait à travers un écart sur le contour obtenu par rapport au contour mesuré expérimentalement par corrélation d'images. La Section 3.3.4 s'intéresse au cas des cellules avec une cinématique non périodique : quatre schémas d'homogénéisation d'ordre supérieur y sont comparés en terme de contour et d'énergie dissipée.

3.3.1 Différents types de conditions aux limites en déplacement

3.3.1.1 Projection du déplacement du contour

Seul le déplacement du contour est extrait pour chaque cellule unitaire. La cellule unitaire non déformée est centrée sur l'origine du repère cartésien et les coordonnées sont ramenées à des valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$ comme le montre la Figure 3.11. Lors de cette étape, les mouvements de corps rigides sont supprimés avant la projection sur une base polynomiale de degré 3. Le choix de cette base est, comme précédemment, lié aux sollicitations en traction et cisaillement. La projection de chaque direction du déplacement sur le polynôme de degré 3 s'écrit :

$$u_i^c(x, y) = \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^{3-m} (\alpha_{(4m+n)}^i \cdot x^m \cdot y^n) \quad (3.9)$$

où les termes α^i sont l'ensemble des coefficients inconnus pour la direction i du déplacement et (x, y) sont les coordonnées locales d'un point du contour. Les termes inconnus sont identifiés à partir du déplacement de tous les nœuds du contour des cellules. Le système a donc n équations où n est le nombre de nœuds du contour et s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{L}\mathbf{V} = \mathbf{U}, \quad (3.10)$$

	0 degrés	30 degrés	45 degrés
Écart	0.075	0.039	0.052

TABLE 3.1 – Écart de l'identification du polynôme de degré 3 du déplacement du contour de la cellule centrale par rapport au déplacement expérimental.

où \mathbf{U} est le vecteur regroupant les déplacements aux nœuds, \mathbf{L} la matrice regroupant les valeurs de la forme polynomiale et \mathbf{V} le vecteur regroupant les termes inconnus. Ces termes sont identifiés par moindres carrés, le nombre d'équations étant supérieur au nombre de coefficients inconnus. Avec l'identification de la forme polynomiale, la norme L_1 de l'écart de l'identification par rapport à la mesure expérimentale est :

$$Ecart = \frac{\sum_i^n |\mathbf{u}^c - \mathbf{u}^e|}{\sum_i^n |\mathbf{u}^e|} \quad (3.11)$$

où \mathbf{u}^c et \mathbf{u}^e sont respectivement le déplacement construit à partir de l'identification et le déplacement expérimental du contour de la cellule unitaire. L'écart par rapport à la mesure expérimentale est donné dans la Table 3.1 pour l'identification du déplacement du contour de la cellule centrale pour chaque orientation du réseau. L'ordre de grandeur de l'écart, inférieur à 7.5%, justifie le choix du degré 3 de la base polynomiale pour calibrer le déplacement.

3.3.1.2 Conditions aux limites périodiques d'ordre un et deux

Nous souhaitons comparer les deux schémas d'homogénéisation périodique, le schéma classique du premier ordre et le schéma du second ordre. Les conditions aux limites périodiques du premier ordre sont définies dans la Section 3.2.1.3 avec l'Équation (3.5) pour les bords gauche et droit. Les bords haut et bas sont contraints de manière similaire. Les bords homologues ont donc une liberté de déformation (ils peuvent se courber par exemple) mais la différence entre deux points homologues doit rester constante. Les conditions aux limites du premier ordre ne dépendent que du gradient de la transformation \mathbf{F}_M .

L'obtention des conditions aux limites du schéma d'homogénéisation périodique du second ordre est détaillée sur l'Annexe A. Le champ microscopique inconnu est supposé périodique sur les bords. En soustrayant le déplacement de deux points homologues pour supprimer le champ inconnu, nous obtenons une relation de contrainte entre les déplacements de ces deux points donnée par l'Équation (A.7) réécrite ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m = L\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_d + LY_s \mathbf{N}_h \mathbf{G}^M \mathbf{N}_d \\ \mathbf{u}_h^m - \mathbf{u}_b^m = L\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_h + LX_s \mathbf{N}_h \mathbf{G}^M \mathbf{N}_d \end{cases} \quad (3.12)$$

Cette relation fait intervenir le gradient de la transformation mais aussi son gradient. Chaque paire de points homologues est contrainte par cette relation qui dépend de la position d'origine des points. Ainsi les bords homologues ne sont plus contraints par un scalaire mais par une relation linéaire. Une seconde relation doit alors être ajoutée pour imposer les tenseurs de déformation en moyenne sur la cellule. Elle est donnée par l'Équation (A.21) réécrite ci-dessous :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_{0L}} \mathbf{u}_L^m d\Gamma_0 = \left(-\frac{L^2}{2}\right) \mathbf{F}^M \cdot \mathbf{e}_x + \frac{L^3}{8} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{e}_x + \frac{L^3}{24} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{e}_y \\ \int_{\Gamma_{0B}} \mathbf{u}_B^m d\Gamma_0 = \left(-\frac{L^2}{2}\right) \mathbf{F}^M \cdot \mathbf{e}_y + \frac{L^3}{24} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{e}_x + \frac{L^3}{8} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{e}_y. \end{cases} \quad (3.13)$$

Remarquons que dans le cas des conditions aux limites du premier ordre, le tenseur de déformation est implicitement imposé en moyenne par les relations de périodicité classiques.

Identification des tenseurs \mathbf{F}_M et \mathbf{G}_M : Les tenseurs du gradient de la transformation et son gradient sont calculés à partir du déplacement mesuré expérimentalement projeté sur la base polynomiale. Les tenseurs s'écrivent en fonction des dérivées des déplacements comme suit :

$$\begin{cases} F_{M_{ij}} = u_{i,j}^c e_i e_j \\ G_{M_{ijk}} = u_{j,ki}^c e_i e_j e_k. \end{cases} \quad (3.14)$$

Dans l'équation précédente, en remplaçant l'expression du déplacement provenant de l'équation (3.9), les tenseurs de déformation \mathbf{F}_M et \mathbf{G}_M s'écrivent :

$$\begin{cases} F_{M_{ij}} = \left(\sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^{3-m} (\alpha_{(4m+n)}^i \cdot x^m \cdot y^n) \right)_{,j} e_i e_j \\ G_{M_{ijk}} = \left(\sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^{3-m} (\alpha_{(4m+n)}^j \cdot x^m \cdot y^n) \right)_{,ki} e_i e_j e_k, \end{cases} \quad (3.15)$$

où les indices $\{i, j, k\}$ sont égaux successivement aux indices $\{x, y\}$. Les termes des tenseurs \mathbf{F}_M et \mathbf{G}_M sont facilement calculables par dérivation du polynôme. Nous considérons la cellule unitaire comme un quadrangle et décidons d'utiliser quatre points de Gauss répartis classiquement dans la cellule pour calculer les tenseurs de déformation au centre (moyenne des valeurs aux points de Gauss). Ces tenseurs moyens sont ensuite utilisés pour appliquer les conditions aux limites périodiques sur les cellules élémentaires.

3.3.1.3 Condition aux limites cinématiques de degré 2 et 3

Des conditions aux limites cinématiques sont aussi appliquées directement. Pour ce faire, au lieu d'imposer une différence de déplacement entre deux bords homo-

logues qui autorisent une liberté de déformation, nous imposons le déplacement directement sur tous les bords. Pour des conditions aux limites cinématiques de degré 2, le déplacement microscopique est appliqué avec le gradient de la transformation et son gradient :

$$\mathbf{u}_2^m = \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{G}_M \cdot \mathbf{X}. \quad (3.16)$$

Ces conditions aux limites sont dites paraboliques puisque les bords peuvent avoir au plus une déformation parabolique.

La limitation de la déformation des bords avec les conditions aux limites cinématiques précédentes est évidente. Il a été vu dans la Section 3.2.1.2 l'importance des paramètres d_h et d_d (ordre 3) dans l'identification de la déformation du bord des cellules unitaires par rapport aux paramètres c_h et c_d (ordre 2) en particulier dans le cas des sollicitations en cisaillement. L'idée est donc d'implémenter des conditions aux limites cinématiques de degré 3. Pour cela, le déplacement microscopique s'écrit en fonction du gradient de la transformation \mathbf{F}_M et de ces deux gradients successifs \mathbf{G}_M et $\nabla \mathbf{G}_M$ comme suit :

$$\mathbf{u}_3^m = \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{G}_M \cdot \mathbf{X} + \frac{1}{3} (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}) \cdot \nabla \mathbf{G}_M \cdot \mathbf{X}. \quad (3.17)$$

L'identification du troisième gradient de la transformation à partir du déplacement mesuré expérimentalement est trop bruitée pour être utilisée. Mais le déplacement expérimental du contour des cellules a été projeté sur un polynôme de degré 3 décrit dans la Section 3.3.1.1. Nous décidons donc d'utiliser ce déplacement comme conditions aux limites cinématiques de degré 3. Les conditions aux limites sont donc égales à :

$$\mathbf{u}_3^m = \mathbf{u}^c. \quad (3.18)$$

Ces conditions aux limites sont dites cubiques avec l'apport du degré 3 dans la prise en compte de la déformation des bords.

3.3.2 Étude des effets des conditions aux limites d'ordre supérieures sur la réponse des cellules unitaires

3.3.2.1 Modèle éléments finis

Les simulations éléments finis sont réalisées à l'aide du logiciel Cast3M. Le comportement du matériau utilisé a été présenté dans la Section 2.2.2 et implémenté dans le code. Toutes les simulations sont menées dans le repère lié à la cellule à 0 degré. Ce choix permet d'appliquer des conditions aux limites simples (surtout dans le cas périodique où il faut calculer les normales pour imposer les conditions de périodicité) mais oblige à tourner le chargement dans les cas à 30 et 45 degrés. Pour cela, il suffit de connaître l'angle d'inclinaison du chargement, puis d'appliquer les relations de rotations aux tenseurs à l'aide de la matrice de rotation entre les deux repères.

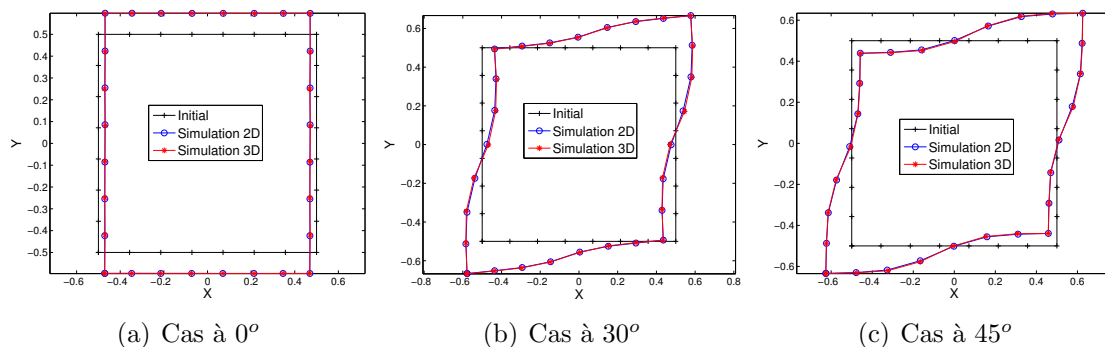


FIGURE 3.12 – Comparaison de la déformation du contour de la cellule centrale avec un modèle en 2D contraintes planes et un modèle 3D.

Les simulations numériques sont tout d'abord réalisées en trois dimensions (3D). En effet à l'échelle de la plaque, l'hypothèse des contraintes planes est validée puisque l'épaisseur de la plaque (1 mm) est petite devant la largeur (65 mm). Mais à l'échelle microscopique, cette hypothèse peut être remise en question puisque la cellule unitaire est en réalité un cube (1 mm de côté). Nous supposons que la direction z est la direction de l'épaisseur et les directions x , y sont les directions du plan moyen de la plaque. Notre étude compare le déplacement (u_x , u_y) du plan moyen des cellules au déplacement expérimental qui n'est connu que dans ce même plan par corrélation d'images.

Comparaison 3D - 2D contraintes planes : Des simulations en deux dimensions (2D) contraintes planes et 3D sont donc menées sur la cellule centrale pour les trois orientations du réseau. Nous cherchons à vérifier si nous pouvons remplacer les simulations 3D par des simulations 2D en contraintes planes bien plus rapides. La cellule est soumise à des sollicitations de traction et cisaillement couplées, provenant de chaque orientation du réseau de trous. Les conditions aux limites périodiques usuelles sont utilisées pour les simulations 2D et 3D. Pour la simulation 3D, le déplacement hors-plan (u_{zz}) est bloqué sur une surface (condition de symétrie) et la seconde est laissée libre. Seul le résultat de cette surface nous intéresse. Nous comparons les déplacements (u_x , u_y) du contour des deux simulations sur la Figure 3.15. Pour chaque orientation du réseau, l'hypothèse cinématique n'a pas d'incidence sur le déplacement du contour dans le plan.

Les simulations 3D permettent quand même de récupérer le déplacement normal aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque. Ces déplacements hors-plan sont représentés sur la géométrie initiale de la cellule unitaire sur la Figure 3.13. Pour les trois orientations du réseau de trous, le déplacement hors-plan est piloté par la direction du chargement. Le chargement en traction dans la cellule entraîne une striction due à l'effet Poisson dans les deux sens perpendiculaires au chargement.

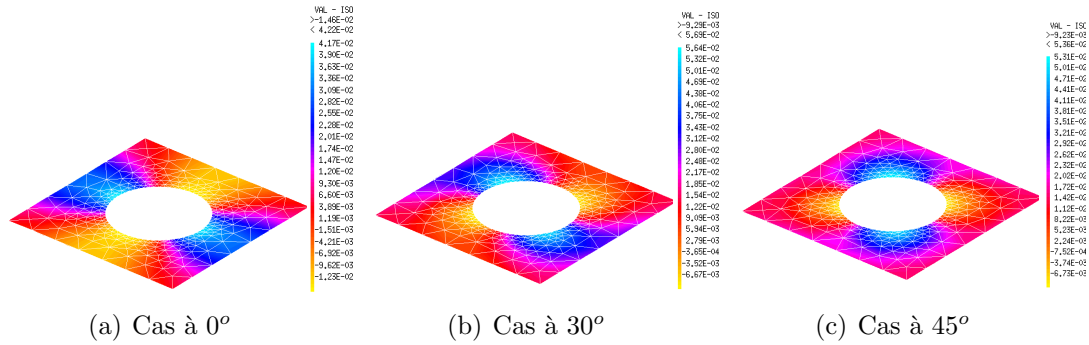


FIGURE 3.13 – Visualisation du déplacement hors plan des simulations 3D avec la face du haut bloqué en déplacement.

Ainsi avec la rotation du chargement, l'effet de striction hors-plan tourne, parallèle à un côté à 0 degrés, diagonal à 45 degrés et entre les deux à 30 degrés.

Au vu des résultats précédents, nous décidons que les simulations numériques seront menées en deux dimensions et en contraintes planes.

3.3.2.2 Méthodologie

Nous commençons par étudier l'influence du schéma d'homogénéisation sur une cellule unitaire avec une cinématique périodique dans la Section 3.3.3. La cellule centrale est choisie pour cette étude. Les résultats sur le déplacement du contour des schémas d'homogénéisation périodique du premier ordre et du second ordre, explicités dans la Section 3.3.1.2, sont comparés au déplacement mesuré par la corrélation d'images. Cette analyse a pour but d'estimer l'amélioration que pourrait apporter le modèle d'un milieu du second ordre à l'échelle macroscopique.

Dans la Section 3.3.4, la réponse non périodique des cellules de la zone de transition est étudiée. Pour étudier les effets des ordres supérieurs sur le contour, quatre schémas d'homogénéisation sont testés : les schémas périodiques du premier ordre et du second ordre et les schémas cinématiques parabolique et cubique explicités dans la Section 3.3.1.3. Le but de cette analyse est de reproduire les conditions aux limites non périodiques du contour à partir de schémas d'homogénéisation d'ordre supérieur.

Le déplacement des cellules unitaires pour cette analyse est le déplacement obtenu lors du dernier pas de corrélation d'images effectué. Les contours simulés pour les cas à 30° et 45° sont ramenés dans le repère de la cellule non-inclinée. Les simulations sont réalisées avec le logiciel Cast3M, le comportement du matériau étant élasto-plastique, nous avons utilisé un chargement incrémental décrit par la Figure 3.14 en fonction du numéro du pas.

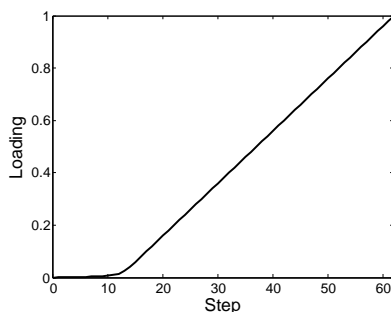


FIGURE 3.14 – Taux de chargement appliqué aux conditions aux limites en fonction du numéro de chargement.

Critères de comparaison des méthodes : Le premier critère de comparaison est la comparaison du contour obtenu par les différents schémas d'homogénéisation. Pour cela, une norme L_1 , définie dans la Section 3.3.1.1 est utilisée pour calculer l'écart entre les déplacements de chacun des schémas vis-à-vis du résultat expérimental. Les déplacements et rotation de corps rigide sont préalablement supprimés du résultat de chaque schéma d'homogénéisation. Le second critère de comparaison est l'énergie totale dissipée au cours de la déformation. Elle est calculée pour chaque schéma d'homogénéisation et comparée à l'énergie expérimentale. L'énergie expérimentale est calculée par éléments finis avec le même maillage en imposant sur le contour de la cellule unitaire le déplacement expérimental mesuré par la corrélation d'images.

3.3.3 Cellule unitaire périodique idéale

La cellule périodique étudiée est la cellule centrale que l'on peut supposer la plus périodique. Les schémas d'homogénéisation périodique du premier ordre et du second ordre sont comparés en terme d'écart de déplacement du contour par rapport à la mesure expérimentale de la cellule. Le contour de la cellule pour les trois orientations du réseau est présentée sur la Figure 3.15.

Les résultats en terme d'écart à la mesure expérimentale sont détaillés sur la Table 3.2. Dans le cas du réseau non incliné, la cellule est chargée uniquement en traction. Le schéma d'homogénéisation du premier ordre périodique est aussi précis que le schéma du second ordre avec un écart autour des 8%. Avec l'inclinaison du réseau de trous, le schéma d'homogénéisation du second ordre n'améliore pas le résultat par rapport au premier ordre quand la cellule est chargée en traction et cisaillement.

Il en résulte que le schéma d'homogénéisation périodique du premier ordre est un bon schéma d'homogénéisation dans le cas d'une cellule avec une cinématique périodique.

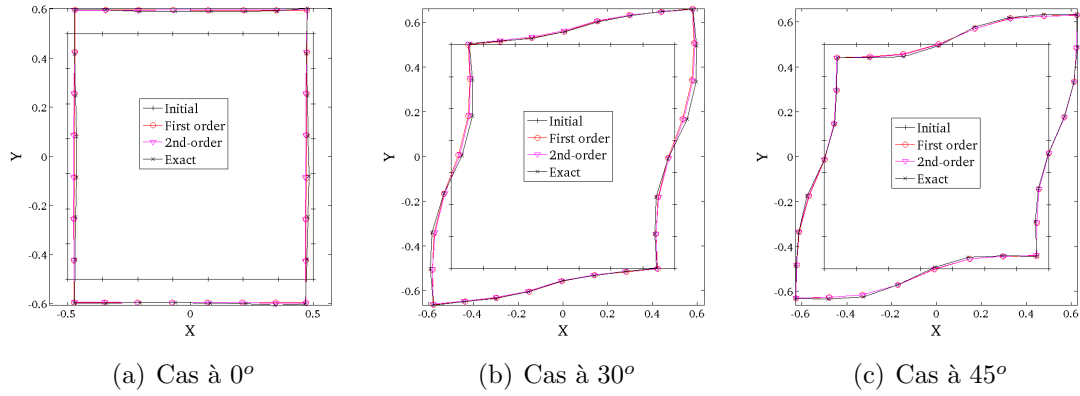


FIGURE 3.15 – Déformation du contour de la cellule unitaire périodique pour les trois orientations : en rouge le résultat du schéma d'homogénéisation du premier-ordre et en magenta le résultat du schéma d'homogénéisation du second-ordre.

Schéma d'homogénéisation	0 degrés	30 degrés	45 degrés
1 ^{er} ordre périodique	0.075	0.052	0.044
2 nd ordre périodique	0.086	0.057	0.045

TABLE 3.2 – Écart du contour des deux schémas d'homogénéisation au résultat expérimental pour la cellule unitaire périodique idéale.

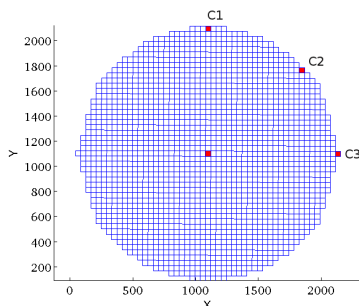


FIGURE 3.16 – Localisation des trois cellules unitaires du bord avec une cinématique non périodique choisies pour comparer les différentes méthodes d'homogénéisation.

3.3.4 Cellules unitaires du bord

Au contraire de la cellule unitaire centrale, les cellules de la zone de transition ont une cinématique non périodique. Le but d'augmenter l'ordre des méthodes d'homogénéisation est de dégénérer les conditions aux limites périodiques classiques en conditions aux limites "non périodiques". Trois cellules avec une cinématique non périodique chacune différente sont extraites de la plaque non inclinée. Ces trois cellules sont représentées sur la Figure 3.16 pour le cas du réseau non incliné.

La première cellule unitaire, appelée cellule $C1$, est localisée en haut au centre du réseau de trous. Cette cellule a le bord haut lié au matériau homogène alors que les autres bords sont liés au réseau de trous. La seconde cellule unitaire, appelée cellule $C2$, est localisée à l'extrémité droite de la ligne inclinée à 45 degrés par rapport au réseau de trous. Cette cellule a les bords haut et droit liés au matériau homogène et les deux autres bords liés au réseau de trous. La troisième cellule unitaire, appelée cellule $C3$, est localisée à droite de la ligne centrale horizontale du réseau de trous. Cette cellule (unique avec son opposé côté gauche) a trois bords liés au matériau homogène et le bord gauche lié au réseau de trous. Ces trois cellules unitaires représentent les différentes cinématiques de déformation de l'ensemble des cellules de la zone de transition.

3.3.4.1 Cellule unitaire $C1$

Les résultats de la déformation du contour de la cellule unitaire appelée $C1$ pour les trois orientations du réseau sont présentés sur la Figure 3.17. Dans le cas à 0° degré, la cellule unitaire est chargée en traction comme la cellule périodique présentée dans la Section 3.3.3. Le schéma d'homogénéisation périodique du premier ordre est donc aussi pertinent que celui du second ordre pour prédire la cinématique de la cellule (écart à la mesure expérimentale entre 12.5% et 14.5%). Les deux schémas d'homogénéisation cinématiques donnent des résultats plus précis avec un écart inférieur à 7.6%. Toutes les valeurs de l'écart à la mesure expérimentale sont présentées dans la Table 3.3.

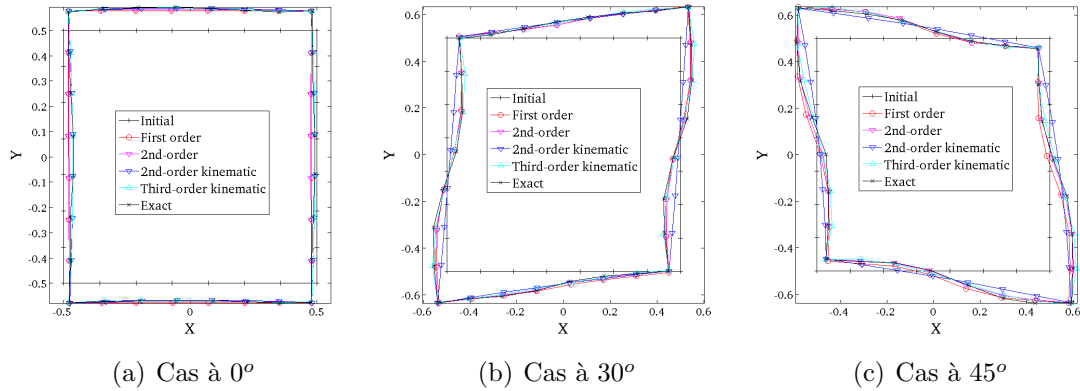


FIGURE 3.17 – Résultat du déplacement du contour de la cellule unitaire $C1$ pour les quatre schéma d'homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.

Cellule $C1$	0 degrés	30 degrés	45 degrés
1 ^{er} ordre périodique	0.125	0.113	0.132
2 nd ordre périodique	0.146	0.055	0.067
Cinématique parabolique	0.076	0.128	0.20
Cinématique cubique	0.054	0.047	0.052

TABLE 3.3 – Écart du contour des quatre schémas d'homogénéisation au résultat expérimental pour la cellule unitaire $C1$.

Quand le réseau de trous s'incline, le schéma d'homogénéisation périodique du premier ordre conserve un écart similaire au premier cas (autour de 12%). Alors que le schéma d'homogénéisation périodique du second ordre est plus précis : l'écart diminue pour atteindre 6%. Pour ces deux cas, nous pouvons remarquer que les bords haut et bas ont une déformation différente (le cisaillement est moins repris par le bord haut avec la présence du matériau homogène) ce qui explique que le schéma du second ordre prédise mieux la cinématique du contour de la cellule. Nous pouvons remarquer qu'un schéma d'homogénéisation cinématique parabolique ne peut pas prédire la déformation due au cisaillement de la cellule unitaire (tout comme le schéma cinématique linéaire). Seul un schéma d'homogénéisation cinématique cubique prend en compte le cisaillement et donne les résultats les plus précis avec un écart autour de 5% pour toutes les orientations du réseau.

Les résultats en terme d'énergie dissipée au cours de la déformation de la cellule sont présentés sur la Figure 3.18. Pour les trois orientations du réseau,

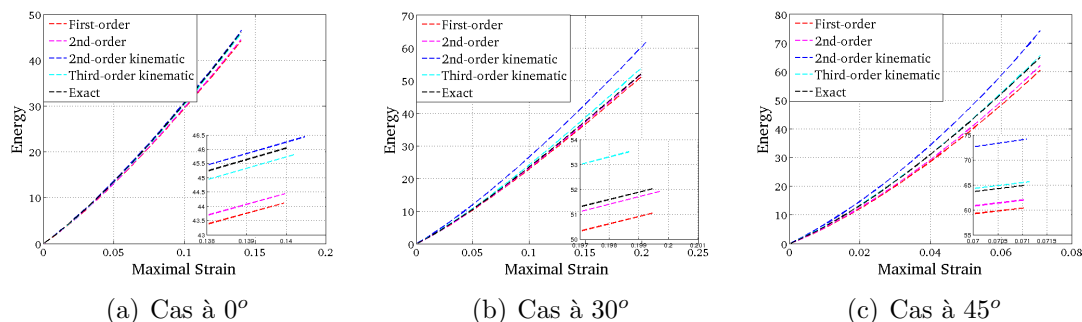


FIGURE 3.18 – Énergie dissipée lors de la déformation de la cellule unitaire $C1$ pour les quatre schémas d'homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.

l'énergie dissipée par le schéma d'homogénéisation périodique du second ordre est plus proche de l'énergie dissipée expérimentale au cours de la déformation que celle dissipée par le schéma du premier ordre. L'écart final est de 8% pour l'inclinaison à 45 degrés et moins de 3% dans les deux autres cas. Le schéma d'homogénéisation cinématique cubique est le plus précis en terme d'énergie dissipée par rapport à la simulation expérimentale (à l'exception du cas à 30 degrés). Alors que le schéma d'homogénéisation cinématique parabolique a une énergie éloignée de l'énergie expérimentale quand le réseau de trous est incliné.

3.3.4.2 Cellule unitaire $C2$

Les résultats du contour de la cellule unitaire appelée $C2$ pour les trois orientations du réseau sont présentés sur la Figure 3.19. Cette cellule unitaire a une cinématique non périodique prononcée entre deux bords homologues. Pour le cas du réseau non incliné, la cellule est principalement chargée en traction (le matériau homogène présent sur la droite entraînant une rotation des bords). Le schéma d'homogénéisation périodique du second ordre et les deux schémas cinématiques rendent bien compte de la perte de périodicité entre les bords homologues comme le montre la Figure 3.19(a). Alors que le schéma d'homogénéisation périodique du premier ordre conserve cette périodicité des bords homologues ce qui entraîne un écart à la mesure expérimentale important sur le contour (27%). Le schéma périodique du second ordre a une erreur proche de 10% comme le schéma cinématique parabolique. Le schéma d'homogénéisation le plus précis est le schéma cinématique cubique avec un écart de 4%. Les valeurs de l'écart à la mesure expérimentale sont présentées dans la Table 3.4.

Quand le réseau de trous s'incline, la perte de périodicité est moins prononcée

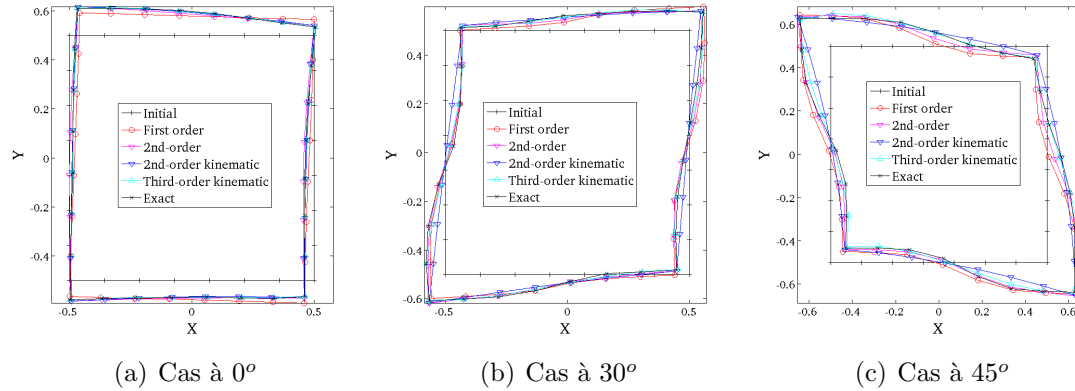


FIGURE 3.19 – Résultat du déplacement du contour de la cellule unitaire $C2$ pour les quatre schéma d'homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.

Cellule $C2$	0 degrés	30 degrés	45 degrés
1 ^{er} ordre périodique	0.27	0.18	0.166
2 nd ordre périodique	0.125	0.082	0.099
Cinématique parabolique	0.113	0.136	0.174
Cinématique cubique	0.04	0.064	0.08

TABLE 3.4 – Écart du contour des quatre schémas d'homogénéisation au résultat expérimental pour la cellule unitaire $C2$.

et le schéma d'homogénéisation périodique du premier ordre amène à un résultat plus précis que dans le premier cas avec un écart qui reste significatif (autour de 17%). Le schéma d'homogénéisation périodique du second ordre donne une meilleure précision. L'écart à la mesure expérimentale est divisé par 2 (inférieur à 10%). Le schéma d'homogénéisation cinématique cubique est le schéma le plus précis avec un écart autour des 7% alors que le schéma cinématique parabolique ne peut pas rendre compte des effets de cisaillement (écart autour de 15%).

Les résultats en terme d'énergie dissipée au cours de la la déformation de la cellule sont présentés sur la Figure 3.20. En accord avec le résultat sur le contour, l'énergie dissipée par le schéma d'homogénéisation cinématique cubique approche le mieux l'énergie dissipée par la simulation de l'expérience alors que le schéma cinématique parabolique est le moins précis. Bizarrement dans le cas à 0 degré, l'énergie dissipée prévue par le schéma d'homogénéisation périodique du premier ordre est plus proche de l'énergie dissipée expérimentale que celle obtenue avec le schéma périodique du

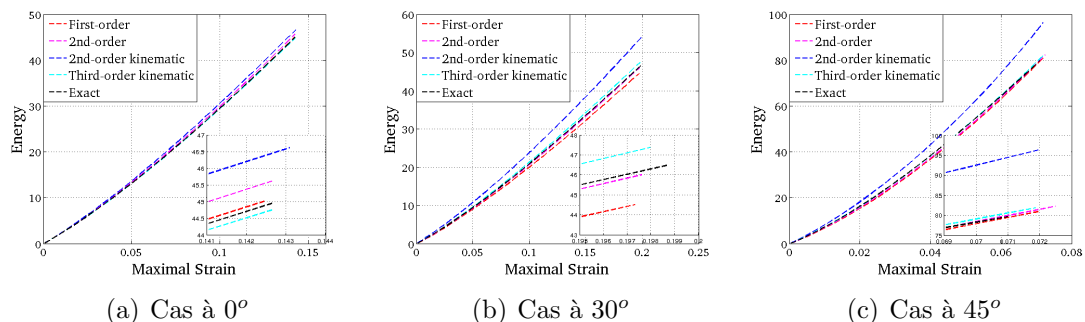


FIGURE 3.20 – Énergie dissipée lors de la déformation de la cellule unitaire $C2$ pour les quatre schémas d’homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.

second ordre alors que le contour obtenu est moins bon.

3.3.4.3 Cellule unitaire $C3$

Les résultats du contour de la cellule unitaire appelée $C3$ pour les trois orientations du réseau sont présentés sur la Figure 3.21. Dans le cas où le réseau est non incliné, cette cellule unitaire a des déformations particulières puisqu’elle a trois bords en contact avec le matériau homogène et concentre les plus grandes déformations. En effet, elle est située sur la ligne centrale, où la fissure apparaît, menant à la déchirure de la plaque. La cellule est sollicitée en traction comme le montre la Figure 3.21(a). Le bord de gauche, lié au réseau de trous, conserve le profil linéaire des cellules à l’intérieur du réseau (voir Figure 3.1(a)) alors que le bord de droite se déforme en parabole à cause de l’effet Poisson accentué par la présence du trou. Le seul schéma d’homogénéisation qui arrive à interpréter la déformation du contour de la cellule est le schéma cinématique cubique. Les trois autres schémas ont un écart à la mesure expérimentale similaire autour de 12.5% alors que le schéma cinématique cubique est très précis avec un écart égal à 2.5%. Les valeurs de l’écart à la mesure expérimentale sont présentées dans la Table 3.5.

Dans le cas à 30 degrés, les bords haut et bas concentrent l’effet de la traction et se déforment en parabole de courbure opposée accentuée par l’effet du trou comme le montre la Figure 3.21(b). Les bords gauche et droit conservent une déformation due au cisaillement qui est plus prononcé pour le bord gauche puisque celui-ci est lié au réseau de trous. Le schéma d’homogénéisation périodique du premier ordre est limité pour interpréter ces conditions aux limites non périodiques ce qui amène à un écart de 17.5%. Le schéma périodique du second ordre estime avec plus de précision la perte de périodicité entre les bords gauche et droit ce qui amène à un écart de

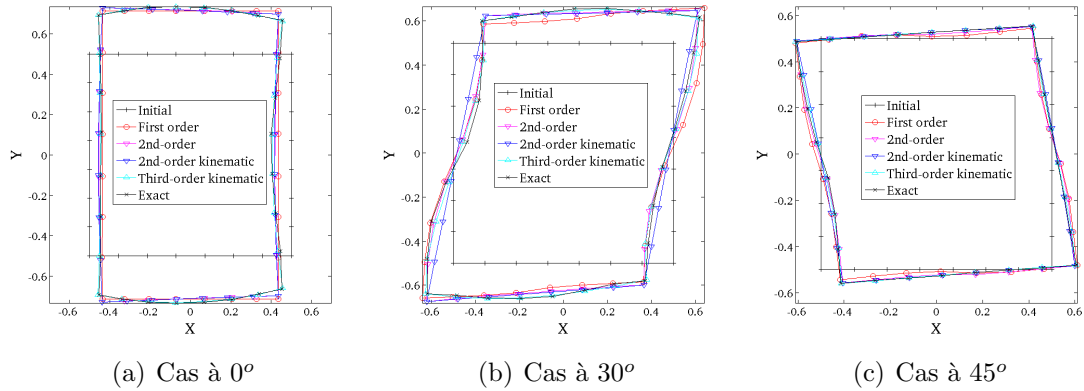


FIGURE 3.21 – Résultat du déplacement du contour de la cellule unitaire $C3$ pour les quatre schémas d'homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.

Cellule $C3$	0 degrés	30 degrés	45 degrés
1 ^{er} ordre périodique	0.125	0.175	0.162
2 nd ordre périodique	0.117	0.13	0.098
Cinématique parabolique	0.136	0.16	0.068
Cinématique cubique	0.025	0.057	0.04

TABLE 3.5 – Écart du contour des quatre schémas d'homogénéisation au résultat expérimental pour la cellule unitaire $C3$.

13% (ce schéma ne peut pas réussir à capturer les paraboles entre les bords haut et bas). Le schéma cinématique parabolique a un écart du même ordre de grandeur que le schéma périodique du premier ordre (16%) ne parvenant pas à reproduire le contour expérimental de la cellule. Seul le schéma cinématique cubique est précis avec un écart égal à 5.7%.

Dans le cas à 45 degrés, les trois bords de la cellule en contact avec le matériau homogène restent droit alors que le bord gauche, lié au réseau de trous, conserve une déformation due au cisaillement comme le montre la Figure 3.21(c). Pour cette orientation, seul le schéma d'homogénéisation périodique du premier ordre ne parvient pas à imposer correctement les conditions aux limites sur la cellule avec un écart de 16%. En augmentant l'ordre du schéma périodique, le contour est correctement prédit avec un écart de 10%. Les schémas d'homogénéisation cinématique sont encore plus précis avec un écart de 7% pour le schéma parabolique et 4% pour le schéma cubique.

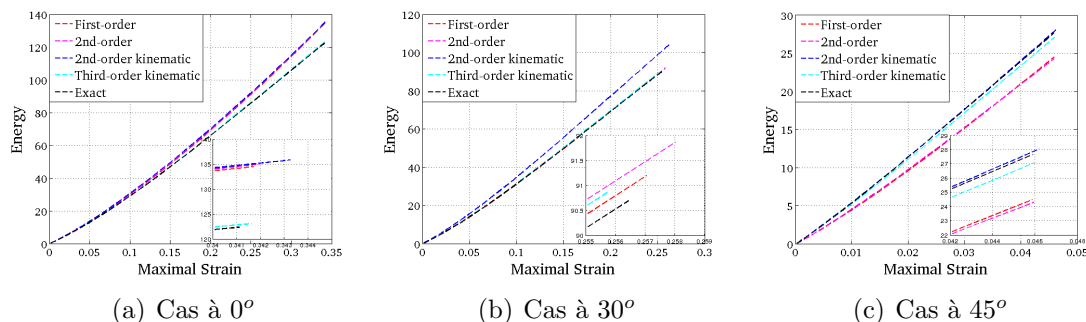


FIGURE 3.22 – Énergie dissipée lors de la déformation de la cellule unitaire $C3$ pour les quatre schémas d’homogénéisation : en rouge le schéma périodique du premier ordre, en magenta le schéma périodique du second ordre, en bleu le schéma cinématique parabolique, en cyan le schéma cinématique cubique et en noir la déformation expérimentale.

Les résultats en terme d’énergie dissipée au cours de la déformation de la cellule sont présentés sur la Figure 3.22. Comme attendu dans le cas non incliné, seul le schéma cinématique cubique obtient la même énergie dissipée que la simulation de l’expérience lors de la déformation. Les trois autres schémas dépassent de 10% l’énergie dissipée par rapport à la simulation de l’expérience. Pour l’inclinaison du réseau à 45 degrés, les deux schémas périodiques n’évaluent pas correctement l’énergie dissipée (11% en moins) par rapport à la simulation de l’expérience alors que les deux schémas cinématiques sont plus près (écart inférieur à 4%). Pour l’inclinaison du réseau à 30 degrés, tous les schémas d’homogénéisation approchent bien l’énergie dissipée avec un écart inférieur à 1.5%. Mais comme dans le cas de la cellule $C2$, l’énergie dissipée par le schéma d’homogénéisation périodique du premier ordre est plus proche que l’énergie dissipée par le schéma du second ordre alors que le contour est moins précis.

3.3.5 Conclusion sur l’intérêt du milieu du second-order

Les cellules unitaires situées dans la zone de transition entre le matériau hétérogène et homogène perdent leur cinématique périodique usuelle entre ses bords homologues. Ainsi pour prendre en compte cet effet, le schéma d’homogénéisation périodique du premier ordre n’est plus suffisant. Nous avons testé trois schémas d’homogénéisation pour essayer de mieux rendre compte des conditions aux limites particulières de ces cellules unitaires. L’apport du second gradient à travers le schéma d’homogénéisation périodique du second ordre conduit à une amélioration indéniable surtout en grandes déformations et avec une sollicitation de cisaillement. Dans le cas d’une traction uniaxiale en petites déformations, le schéma du second ordre n’apporte pas d’avantage. De plus, dans le cas où la cellule unitaire

concentre la localisation des déformations (cellule $C3$ à 0 degré), les schémas d'homogénéisation périodiques ne peuvent représenter correctement les conditions aux limites. Le schéma cinématique cubique est le plus précis dans ce cas. Le dernier schéma d'homogénéisation testé est le schéma cinématique parabolique, celui-ci ne parvient pas à imposer des déformations de cisaillement sur le contour.

Le second critère d'analyse des schémas d'homogénéisation est l'énergie dissipée dans le modèle qui est comparée à celle obtenue par la simulation avec les conditions aux limites provenant directement de l'expérience. Dès que la cellule unitaire est sollicitée en cisaillement, l'énergie dissipée par le schéma d'homogénéisation cinématique parabolique est très loin du résultat attendu. L'énergie dissipée par le schéma périodique du second ordre n'est pas forcément plus précise que l'énergie dissipée que du schéma périodique du premier ordre même si le contour de la cellule trouvé est meilleur. Pour ces deux schémas, une liberté de déformations du contour est laissée puisque seul la différence de déplacement entre les points homologues est imposée mais ces déplacements sont imposés en moyenne sur toute la cellule ce qui explique que l'énergie dissipée soit du même ordre de grandeur. L'énergie dissipée ne peut donc pas être un critère discriminant entre les résultats des schémas d'homogénéisation périodique.

3.4 Synthèse

Les résultats de la corrélation d'images microscopique ont permis de projeter le déplacement du contour de chaque cellule unitaire sur une base polynomiale de degré 3. Les paramètres décrivant la déformation des bords pour caractériser la réponse périodique ont été analysés par une étude statistique. Les cellules unitaires ayant une cinématique non périodique se situent dans la zone de transition entre le matériau homogène et hétérogène. L'épaisseur de la zone de transition est d'une cellule unitaire environ. Suivant les orientations du réseau, les sollicitations des cellules varient entre la traction et le cisaillement dans une grande plage de déformation plastique.

Les conditions aux limites de la cellule unitaire centrale, périodique, sont étudiées avec les schémas d'homogénéisation périodique du premier et du second ordre. Nous constatons que l'utilisation d'un schéma du second ordre n'apporte aucun avantage vis-à-vis du schéma du premier ordre. Cette amélioration n'offre donc pas de meilleurs résultats pour les cellules du matériau hétérogène situées à l'intérieur (90% des cellules).

En revanche, trois cellules de la zone de transition ayant une cinématique non périodique sont analysées. Pour ces cellules nous comparons quatre schémas d'homogénéisation d'ordre supérieur : les deux schémas périodiques et deux schémas cinématiques parabolique et cubique. Le schéma d'homogénéisation cinématique parabolique ne peut pas représenter des déformations en cisaillement sur les bords. Il faut donc imposer des conditions aux limites cinématiques cubique sur le bord. Pour

tous les cas de chargement des cellules, elles donnent les résultats les plus précis. Il est de plus montré que lorsque la cellule n'a plus une réponse périodique, le schéma d'homogénéisation périodique du second ordre donne de meilleurs résultats que le schéma du premier ordre. Le contour prédit est nettement plus proche des résultats mesurés expérimentalement pour tous les cas. L'écart est divisé par un facteur compris entre 1.3 et 2.3.

Chapitre 4

Homogénéisation de la cellule périodique

L'analyse des cellules unitaires a montré que les bords des cellules situées au centre de la structure ont une cinématique de déformation périodique. Les méthodes FE^2 sont générales lors de la mise en œuvre mais sont très coûteuses en temps de calcul lors de la résolution. Nous allons tenter de proposer dans ce chapitre un modèle de matériau homogène équivalent de la cellule unitaire périodique. Dans la première partie du chapitre, nous cherchons à obtenir les caractéristiques élastiques du MHE, puis dans la seconde partie le comportement plastique. Pour cela, nous nous appuyons sur les résultats de corrélation d'images des trois essais ainsi que des cas simulés numériquement pour la cellule unitaire.

Sommaire

4.1	Introduction	93
4.2	Hypothèses des calculs numériques	93
4.2.1	Conditions aux limites	93
4.2.2	Loi de comportement	94
4.2.3	Calcul des tenseurs homogénéisés	94
4.3	Identification des paramètres élastiques	95
4.3.1	Choix des paramètres élastiques	95
4.3.2	Identification des paramètres élastiques	96
4.3.3	Bilan	99
4.4	Identification de l'écrouissage	100
4.4.1	Surface de charge	100
4.4.2	Critère de Hill	103
4.4.3	Critère de Drucker-Prager	107
4.4.4	Calcul de la loi d'écrouissage	113
4.5	Synthèse	115

4.1 Introduction

Le Chapitre 3 s'appuie sur les expériences pour montrer que la grande majorité des cellules unitaires ($\simeq 90\%$) de la zone architecturée ont une cinématique périodique. Pour ces cellules, la Section 3.3.3 a établi que des conditions aux limites d'ordre supérieures n'améliorent pas les résultats de ces cellules. Dans les méthodes de type FE^2 , le temps de calcul peut être grandement diminué si l'on remplace les cellules unitaires calculées à chaque point de Gauss par un milieu homogène équivalent. En effet, nous avons vu que l'utilisation d'un milieu du second ordre n'est nécessaire que sur les cellules de la zone de transition du matériau architecturé. L'utilisation d'une méthode FE^2 sur tout le matériau architecturé n'offre pas beaucoup d'amélioration en temps de calcul par rapport à une simulation *full field* [YVO 07].

Remplacer les cellules avec un comportement périodique par un MHE améliorerait grandement le gain en temps de calcul. Afin de déterminer le comportement du MHE, nous nous appuyerons sur les trois expériences. Les déformations obtenues par corrélation d'images sont utilisées comme conditions aux limites de simulations numériques. Dans le domaine plastique, ces expériences ne sont pas suffisantes, nous ajouterons des points sur la surface de charge à l'aide de simulations numériques de situations de chargement d'essais biaxiaux.

Le matériau de base de la cellule unitaire est un acier inoxydable isotrope. Mais la géométrie de la cellule, avec un trou en son centre, affecte le MHE qui n'est alors plus isotrope. Les symétries de la cellule rendent le comportement du MHE cubique. Ce phénomène n'est pas seulement applicable au domaine élastique mais également sur le domaine plastique. Le critère de plasticité de Von Mises qui caractérise ce matériau à l'échelle microscopique n'est donc pas généralisable à l'échelle macroscopique.

La Section 4.3 présente l'extraction des paramètres élastiques du MHE à l'aide de deux approches différentes : la première basée sur les essais et la seconde sur l'homogénéisation usuelle. Dans la Section 4.4 le comportement plastique du MHE est étudié. Un critère à écrouissage orthotrope (le critère de Hill) est d'abord utilisé pour déterminer le comportement du MHE en traction/cisaillement biaxiaux. Les calculs numériques de la cellule montrent un comportement dissymétrique traction-compression : le premier invariant des contraintes est alors introduit ce qui nécessite l'utilisation du critère de Drucker-Prager .

4.2 Hypothèses des calculs numériques

4.2.1 Conditions aux limites

L'homogénéisation des cellules unitaires nécessite le choix des conditions aux limites. Comme la taille de la cellule n'est pas grande par rapport à la taille de l'hétérogénéité, les conditions aux limites périodiques permettent d'approcher le comportement effectif du MHE au plus près. Il a été montré dans le Chapitre 3

que les cellules unitaires périodiques ont la même réponse quand les conditions aux limites périodiques appliquées sont du premier ou du second ordre. Nous décidons donc d'utiliser les conditions aux limites périodiques usuelles du premier ordre.

Les simulations numériques sont réalisées avec le logiciel éléments finis *Cast3M*. Il a été montré dans la Section 3.3.2.1 que des simulations en grandes déformations avec l'hypothèse des contraintes planes en deux dimensions donnent des résultats similaires à des simulations en trois dimensions au niveau de la cellule unitaire. Le nombre de pas de chargements du calcul numérique est choisi volontairement très grand afin d'obtenir un nombre conséquent d'états de déformations homogénéisées. En effet, les lois élasto-plastiques sont des lois en vitesse, la dérivée étant estimée par différence finie. Il en résulte que la variation entre deux simulations à un état de déformation donné doit être la plus faible possible. Le nombre de pas de chargement est présenté sur la Figure ??.

4.2.2 Loi de comportement

La loi de comportement de l'acier inoxydable 304L a été définie dans la Section 2.2.2. Celle-ci a été identifiée sur des barres par des études de corrélation d'images [RÉT 13]. Dans notre cas, les plaques sont issues de deux séries de tôles laminées dans la même direction. Dans le cas de l'acier inoxydable utilisé, les variations du comportement identifiées entre les diverses éprouvettes sont très faibles. La loi de comportement présentée dans la Section 2.2.2 est donc utilisée pour les simulations. ce comportement est supposé isotrope.

4.2.3 Calcul des tenseurs homogénéisés

Tenseur des déformations homogénéisées \mathbf{E} : le tenseur des déformations homogénéisées est l'intégrale des déformations sur la surface totale S du carré comprenant la cellule unitaire et le trou soit :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{S} \int_S \boldsymbol{\varepsilon} dS \quad (4.1)$$

A l'intérieur du trou, les contraintes sont nulles mais pas les déformations qui sont inconnues. En effet, le trou a une déformation propre. Ainsi, le tenseur des déformations homogénéisées n'est pas égal à l'intégrale des déformations sur la surface de la cellule unitaire uniquement. Nous décidons de mailler le trou avec un matériau élastique de caractéristiques très faibles devant le matériau de la cellule ($\nu_t = \nu$ et $E_t = E/10000$). Le comportement de la cellule unitaire ne sera pas modifié par l'ajout de ce "matériau" et les déformations homogénéisées se calculent alors facilement avec l'Équation (4.1).

Tenseur des contraintes homogénéisées $\boldsymbol{\Sigma}$: dans la cellule et le trou, le tenseur des contraintes microscopiques est complètement connu. Ainsi, le tenseur des

contraintes homogénéisées est obtenu directement par l'intégrale sur la surface totale S tel que :

$$\Sigma = \langle \Sigma \rangle = \frac{1}{S} \int_S \Sigma dS \quad (4.2)$$

Ces deux tenseurs homogénéisés sont donc obtenus dans le plan. La valeur hors-plan de la contrainte homogénéisée est nulle (hypothèse des contraintes planes). La déformation hors-plan est calculée comme la somme des déformations hors-plan homogénéisées plastique et élastique. La partie plastique est homogénéisée directement à partir des valeurs de sortie de *Cast3M* alors que la partie élastique homogénéisée E_{zz}^e est calculée à partir de l'hypothèse des contraintes planes telle que :

$$\begin{aligned} \langle E_{zz}^e \rangle_S &= \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{zz}^e dS \\ \langle E_{zz}^e \rangle_S &= \frac{1}{S} \left[\int_{S_t} \varepsilon_{zz}^e dS_t + \int_{S_c} \varepsilon_{zz}^e dS_c \right] \\ \langle E_{zz}^e \rangle_S &= \frac{1}{S} \left[\frac{-\nu_t}{E_t} \int_{S_t} (\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}) dS - \frac{\nu}{E} \int_{S_c} (\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}) dS \right] \\ \langle E_{zz}^e \rangle_S &= \frac{1}{S} \left[\frac{-\nu_t S_t}{E_t} \langle \Sigma_{xx} + \Sigma_{yy} \rangle_t - \frac{\nu S_c}{E} \langle \Sigma_{xx} + \Sigma_{yy} \rangle_c \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

où les surfaces S_t et S_c représentent les surfaces du trou et du matériau. Le coefficient de Poisson du trou ν_t est égal au coefficient de Poisson du matériau de base.

4.3 Identification des paramètres élastiques

4.3.1 Choix des paramètres élastiques

Le comportement du MHE est choisi cubique (trois paramètres à déterminer ultérieurement) à cause des symétries de la géométrie la cellule unitaire. En effet, la cellule unitaire est orthotrope dans le plan. De plus, le comportement est identique dans les deux directions de ces plans de symétrie. Ainsi, la symétrie cubique réduit le nombre de paramètres à déterminer à 3 dans le plan. Dans ce cas, le module de cisaillement μ^* n'est pas lié au module de Young E et au coefficient de Poisson ν par la relation classique :

$$\mu^* \neq \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.4)$$

La matrice de souplesse du matériau homogène équivalent s'écrit donc en fonction des trois paramètres à déterminer (E , ν et μ^*) :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu^*} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

La matrice de souplesse \mathbf{S} relie le tenseur des contraintes homogénéisées Σ et le tenseur des déformations homogénéisées \mathbf{E} par la relation :

$$\mathbf{S} \cdot \Sigma = \mathbf{E} \quad (4.6)$$

4.3.2 Identification des paramètres élastiques

4.3.2.1 A partir des déformations expérimentales

Les trois expériences réalisées chargent la cellule élémentaire avec trois angles différents. Le chargement appliqué dans l'expérience sollicite la matrice de comportement dans un repère différent du repère principal. Il suffit alors de "tourner" la matrice de comportement par la relation :

$$\mathbf{S}_\theta = \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{S} \mathbf{B}_\theta \quad (4.7)$$

où la matrice \mathbf{B}_θ est la matrice de rotation du repère égale à :

$$\mathbf{B}_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sqrt{2}\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta\sin\theta & -\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

La résolution de l'Équation (4.6) dans les trois cas de chargement (avec la rotation d'angle θ) amène à l'écriture d'un système de trois équations par chargement. Le calcul des systèmes est fait dans l'Annexe B et aboutit aux Équations (B.7) (B.8) et (B.10) pour les angles de 0 degré, respectivement 45 et 30 degrés, réécrites ci-après :

$$\begin{cases} \Sigma_x \frac{1}{E} - \Sigma_y \frac{\nu}{E} = E_x \\ \Sigma_y \frac{1}{E} - \Sigma_x \frac{\nu}{E} = E_y \\ \Sigma_{xy} \frac{1}{\mu^*} = E_{xy} \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y) \frac{1}{E} - \frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y) \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2}(\Sigma_x - \Sigma_y) \frac{1}{\mu^*} = E_x \\ \frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y) \frac{1}{E} - \frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y) \frac{\nu}{E} - \frac{1}{2}(\Sigma_x - \Sigma_y) \frac{1}{\mu^*} = E_y \\ \Sigma_{xy} \frac{1}{E} + \Sigma_{xy} \frac{\nu}{E} = E_{xy} \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} (5\Sigma_x + 3\Sigma_y - 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \frac{1}{E} - (3\Sigma_x + 5\Sigma_y + 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \frac{\nu}{E} + (3(\Sigma_x - \Sigma_y) + 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \frac{1}{\mu^*} = E_x \\ (3\Sigma_x + 5\Sigma_y + 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \frac{1}{E} - (3\Sigma_x + 5\Sigma_y - 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \frac{\nu}{E} + (3(\Sigma_y - \Sigma_x) - 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \frac{1}{\mu^*} = E_y \\ (\sqrt{3}(\Sigma_y - \Sigma_x) - 6\sqrt{2}\Sigma_{xy})/8 * \frac{1}{E} + (\sqrt{3}(\Sigma_y - \Sigma_x) - 6\sqrt{2}\Sigma_{xy})/8 * \frac{\nu}{E} + (\sqrt{3}(\Sigma_y - \Sigma_x) + 2\sqrt{2}\Sigma_{xy})/8 * \frac{1}{\mu^*} = E_{xy} \end{cases} \quad (4.11)$$

Les pas de chargement définis dans le Chapitre 3 par la Figure ?? sont réutilisées pour les simulations numériques. Plusieurs pas ont lieu dans la zone élastique du chargement. A chacun de ces pas, nous récupérons la déformation et contrainte homogénéisée afin de calculer les paramètres élastiques du MHE. L'identification des paramètres se fait en résolvant le système $\mathbf{K}\mathbf{P} = \mathbf{E}$ où \mathbf{P} est le vecteur regroupant les inconnues, \mathbf{K} la matrice construite à partir des contraintes homogénéisées et \mathbf{E} le vecteur des déformations homogénéisées. Les paramètres sont identifiés par moindres carrés et les résultats sont montrés dans la Table 4.1.

4.3.2.2 A partir de l'homogénéisation classique

Une seconde manière de calculer les paramètres élastiques du MHE est d'utiliser l'homogénéisation classique. La cellule unitaire est ainsi soumise à trois chargement macroscopiques élémentaires reflétant les différentes sollicitations. Ces trois chargements sont indépendants et égaux à :

- Traction uniaxiale sens X :

$$E = [1 \ 0 \ 0]. \quad (4.12)$$

- Traction uniaxiale sens Y :

$$E = [0 \ 1 \ 0]. \quad (4.13)$$

- Cisaillement pur :

$$E = [0 \ 0 \ 1]. \quad (4.14)$$

Les contraintes homogénéisées sont ensuite calculées dans la cellule unitaire et la matrice du comportement homogénéisé se lit en ligne à partir de chaque chargement. Nous obtenons alors directement :

$$\Sigma = \mathbf{K}\mathbf{E} \quad (4.15)$$

4. Homogénéisation de la cellule périodique

	Loi des mélanges	Longueur effective	Expérimental	Homogénéisation
E (GPa)	36.05	84	103.4	104.5
ν	-	-	0.24	0.23
μ^* (GPa)	-	-	42.6	46.3
μ^* isotrope (GPa)	-	-	41.7	42.5

TABLE 4.1 – Valeurs homogénéisées des paramètres du comportement élastique par différentes méthodes.

Dans ce cas, les composantes K_{13} et K_{23} ne sont pas nulles mais sont très faibles devant les valeurs du module de Young et de cisaillement : environ 10000 fois plus faible.

4.3.2.3 Avec des approximations du module de Young

Avec la loi des mélanges, le module de Young E_m est égal au rapport de la surface de matériau homogène sur la surface totale soit :

$$E_m = \frac{1 - S_t}{S} E. \quad (4.16)$$

Cette approximation est égale à la borne de Reuss présentée dans la Section 1.1.1.5 et minimise la valeur effective du module de Young. Le rapport de la longueur effective résistant à la traction donne une approximation plus réaliste du module de Young :

$$E_l = \frac{L - d}{L} E, \quad (4.17)$$

où L et d sont respectivement la longueur de la cellule unitaire et le diamètre du trou. Cette borne donne une valeur inférieure au module de Young calculé expérimentalement. Toutes les valeurs des paramètres sont données dans la Table 4.1.

4.3.2.4 Discussion des résultats

Nous allons commenter dans cette section les paramètres élastiques du MHE, détaillés dans la Table 4.1, calculés par les différentes méthodes d'homogénéisation. Nous comparons d'abord la valeur du module de Young homogénéisée E .

La loi des mélanges minore bien la valeur du module de Young effectif puisque cette approximation est équivalente à la borne de Reuss. La valeur obtenue par l'Équation 4.17 est deux fois plus élevée mais reste inférieure de 20% à la valeur trouvée par l'homogénéisation. Le module de Young homogénéisé ne peut donc pas se calculer à partir de la section effective en traction de la cellule unitaire. La valeur calculée avec les expériences ou par l'homogénéisation usuelle est très proche (environ 104 GPa). Le coefficient de Poisson du MHE est à peu près égal à celui du matériau initial (0.23 pour 0.25). Dans le domaine élastique linéaire, le trou n'a pas d'influence sur le comportement transverse en traction.

Le module de cisaillement homogénéisé μ^* extrait des expériences (42.6 GPa) n'est pas le même que celui prédit par l'homogénéisation usuelle (46.3 GPa). Pour les expériences, le module de cisaillement homogénéisé est assez proche du module de cisaillement isotrope (2% de différence) alors que dans le cas de l'homogénéisation classique la différence est plus prononcée (10% de différence). Dans le cas de l'homogénéisation classique le module de cisaillement est calculé à partir d'une simulation en cisaillement pur alors que pour l'approche expérimentale l'identification des paramètres se fait de manière couplée par la rotation du chargement. La famille des trois chargements expérimentaux ne produit pas des états de sollicitations assez indépendants. Il en résulte une mauvaise précision de la valeur du module de cisaillement homogénéisé. La surface de charge, représentée sur la Figure 4.2, montre dans le domaine plastique que les points expérimentaux sont assez proches les uns des autres. Le cas à 45 degrés où la cellule paraît fortement sollicitée en cisaillement ne sollicite en fait la cellule qu'en traction dans un autre repère. C'est donc certainement l'homogénéisation usuelle qui donne les bons paramètres élastiques du MHE.

4.3.3 Bilan

Le matériau de base de la cellule unitaire est un acier inoxydable au comportement isotrope. L'ajout de trous dans la structure architecturée rend le comportement du matériau homogène équivalent cubique. Les paramètres élastiques du matériau homogène équivalent de la cellule unitaire ont été calculés de deux manières différentes. La première méthode calcule les paramètres à partir des trois essais avec les déformations homogénéisées connues par corrélation d'images associée à une simulation numérique qui permet de calculer les contraintes homogénéisées. Les paramètres sont ensuite identifiés grâce à la rotation de la matrice de souplesse dans le repère du chargement. Les paramètres élastiques ont de plus été calculés par une homogénéisation usuelle où des chargements simples, à savoir traction et cisaillement purs, ont été appliqués afin de calculer la matrice de comportement du MHE.

Les résultats de ces deux approches sont très similaires sur le module de Young et le coefficient de Poisson. Le coefficient de Poisson ne varie presque pas suivant la méthode d'identification puisque les concentrations de contrainte générées dans le trou n'ont pas d'effet dans le domaine élastique. Le module de Young du MHE est lui très fortement diminué, il reste tout de même supérieur au module de Young qui peut se calculer par la longueur effective de matériau. Le trou s'ovalisant avec la déformation, le MHE conserve un module de Young un peu supérieur à la moitié de la valeur initiale. Le paramètre qui varie le plus entre les deux approches est le module de cisaillement. Celui-ci s'écarte de la valeur isotrope dans le cas de l'homogénéisation numérique alors que le MHE reste isotrope dans le cas des expériences. Dans l'approche expérimentale, la famille du chargement n'est certainement pas libre ce qui ne fait pas ressortir le comportement orthotrope du MHE.

Le comportement élastique du MHE est donc déterminé. Pour remplacer la cel-

lule unitaire périodique par un MHE, le comportement plastique est aussi nécessaire. La section 4.4 traite de l'homogénéisation plastique avec un critère à écrouissage orthotrope.

4.4 Identification de l'écrouissage

Cette Section s'intéresse au comportement dans le domaine plastique du MHE de la cellule unitaire périodique. A l'instar du domaine élastique, les essais ne sont pas suffisants pour caractériser totalement le comportement plastique. Des simulations numériques avec des sollicitations biaxiales en traction, cisaillement et compression sont menées afin de déterminer la surface de charge complète du MHE et le critère de plasticité à choisir dans la Section 4.4.1.

Comme dans le domaine élastique, le trou à l'intérieur de la cellule introduit des symétries donc de l'orthotropie dans le comportement du MHE. Le critère de Von Mises, utilisé pour caractériser le matériau de base de la zone architecturée, ne s'étend pas à l'échelle macroscopique pour le MHE. Après s'être assuré que la déformation plastique se fait à volume constant, nous identifierons le critère de Hill, critère à écrouissage orthotrope, pour des sollicitations biaxiales en traction et cisaillement dans la Section 4.4.2.

Les simulations numériques montrent un comportement homogénéisé dissymétrique traction-compression : nous devons donc prendre en compte la pression hydrostatique. La présence du trou fait que le matériau n'a plus un comportement symétrique pour une sollicitation en traction et en compression. Nous utilisons donc le critère de Drucker-Prager, qui prend en compte le premier invariant, la pression hydrostatique, et le second invariant du tenseur des contraintes. Ce critère est identifié dans la section 4.4.3 pour des sollicitations biaxiales en traction, cisaillement et compression.

4.4.1 Surface de charge

Dans l'espace des contraintes principales, il existe un domaine à l'intérieur duquel toute variation de contrainte n'engendre que des variations de déformation élastique et aucune déformation plastique. Sur le bord de ce domaine élastique, le comportement est élasto-plastique. La surface délimitant le domaine d'élasticité est appelée surface seuil de plasticité (ou surface de charge). Pour cela, un critère de plasticité (une fonction scalaire f) est défini et dépend de l'état des contraintes tel que :

$$\begin{cases} f(\Sigma) < 0 & \text{à l'intérieur du domaine} \\ f(\Sigma) = 0 & \text{sur la frontière} \end{cases} \quad (4.18)$$

Disposition des points expérimentaux : pour les trois orientations de la cellule unitaire, les contraintes principales et la déformation scalaire de Von Mises sont calculées. Pour un état de déformation donné, la surface de charge sera délimité

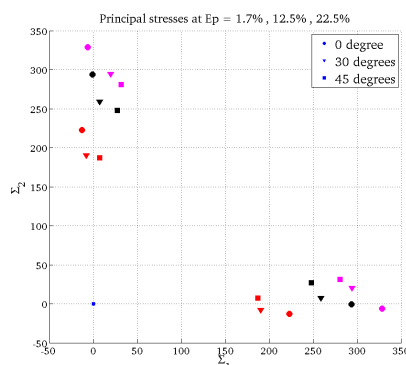


FIGURE 4.1 – Points représentant la surface de charge de la cellule sous les trois sollicitations expérimentales. Points donnés pour la déformation plastique scalaire (Von Mises) égale à 1.7% (points en rouge), 12.5% (points en noir) et 22.5% (points en magenta).

par les trois points définissant l'état des contraintes principales dans la cellule. La surface de charge est représentée sur la Figure 4.1 où les états de chargement correspondants aux symétriques de l'inclinaison à 0 et 30 degrés ont été ajoutés. Les états de contraintes obtenus expérimentalement ne sont pas suffisants pour décrire correctement la surface de charge du matériau.

Disposition de points correspondants à des sollicitations fictives : Des sollicitations fictives sont donc appliquées numériquement sur la cellule pour compléter la surface dans le plan des contraintes principales positives. Des points correspondants aux sollicitations de traction et compression biaxiales sont donc ajoutées : la surface de charge correspondante est représentée sur la Figure 4.2.

Les surfaces de charge avec une faible iso-déformation plastique ne sont pas tracées, il faut que la plasticité se stabilise dans la cellule pour lire la surface de charge. Les points rouges, noirs et magentas, correspondent respectivement à un état de déformation plastique de Von Mises égal à 1.7%, 12.5% et 22.5%. Les points expérimentaux sont toujours représentés avec des symboles pleins. La cellule sollicitée en traction biaxiale, cisaillement et en traction uniaxiale est respectivement représentée par les points avec des symboles +, \times et \diamond .

Les points correspondants aux expériences à 30 et 45 degrés sont placés au bord de l'ellipse. La position du point de l'expérience à 0 degré, comme celle de la simulation uniaxiale, diffère de l'ensemble des autres points à chaque iso-déformation. Cette cellule unitaire est soumise à une sollicitation proche d'une traction uniaxiale comme il a été vu dans la Section 2.3.5.2. Pour ces deux cas, les résultats obtenus sont en dehors de la surface de charge. Lors de la résolution avec Cast3M, un verrouillage numérique apparaît empêchant la déformation dans le sens transverse. En changeant les conditions aux limites de périodiques à cinématiques, ces deux points

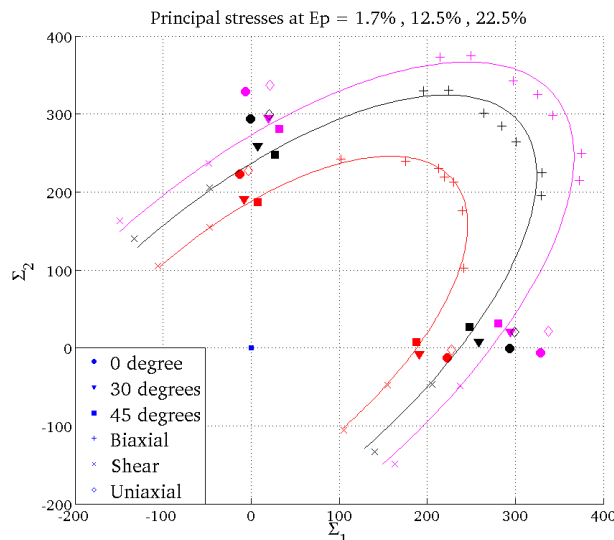


FIGURE 4.2 – Points représentant la surface de charge de la cellule sous différentes sollicitations (trois expériences + sollicitations fictives). Points donnés pour la déformation plastique scalaire (Von Mises) égale à 1.7% (points en rouge), 12.5% (points en noir) et 22.5% (points en magenta).

correspondants au calcul et à l'essai reviennent sur la surface de charge. Pour éviter de changer les conditions aux limites utilisées, puisque les cellules ont une réponse périodique, ces deux cas de chargement sont donc laissés de côté dans le calcul de la loi de plasticité du MHE.

La surface de charge est maintenant clairement définie, c'est une ellipse dont le grand axe est incliné de 45 degrés par rapport à l'horizontale. Cette géométrie de surface de charge est classique pour les aciers. L'ellipse passant au plus proche des points à chaque état de déformation est tracée sur la Figure 4.2. Le critère de Von Mises est bien adapté pour les aciers comme notre matériau à l'échelle microscopique. Par contre, à l'échelle macroscopique où nous cherchons à obtenir le comportement du MHE, la géométrie du trou influence le comportement de la cellule. Pour les ellipses tracées, le rapport entre le grand axe et le petit axe est différent de 2, le critère de Von Mises n'est donc plus adapté.

L'évolution de la trace de la déformation plastique en fonction de la déformation plastique de Von Mises pour les trois orientations du réseau est tracée sur la Figure 4.3. La déformation plastique de la cellule unitaire se fait à volume constant (trace nulle). Nous décidons donc de prendre en compte, comme pour les paramètres élastiques, l'anisotropie de la cellule unitaire à cause de sa géométrie à travers le critère de Hill. Le critère de Hill, largement utilisé pour décrire l'orthotropie des matériaux, est une généralisation du critère de Von Mises.

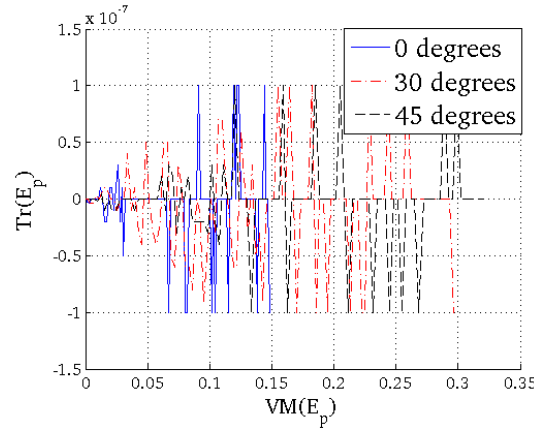


FIGURE 4.3 – Évolution de la trace de la déformation plastique en fonction de la déformation plastique de Von Mises pour les trois orientations du réseau.

4.4.2 Critère de Hill

Pour prendre en compte l'anisotropie du matériau homogène équivalent, nous utilisons donc le critère de plasticité de Hill [LEM 09]. Ce critère est un critère à écrouissage orthotrope. Il s'agit d'une loi où seule la taille du domaine d'élasticité se dilate avec la déformation plastique. Cet écrouissage ne nécessite donc qu'une variable scalaire pour décrire l'évolution du domaine. Le critère de plasticité f s'écrit :

$$f(\Sigma) = \|\Sigma\| - \Sigma_Y, \quad (4.19)$$

où la norme $\|\cdot\|$ (appelée contrainte équivalente) indique la forme du critère de plasticité et Σ_Y est le seuil de plasticité qui dépend d'une variable interne p .

Écriture du critère de Hill : l'écrouissage du matériau est défini par le critère de plasticité f . Lorsque le critère est nul, la contrainte équivalente dans le matériau est égale au seuil de plasticité et le matériau va donc plastifier. La fonction f dans le cadre du critère de Hill anisotrope s'écrit comme suit :

$$f(\Sigma) = [\Sigma^T \mathbf{H} \Sigma]^{1/2} - \Sigma_Y, \quad (4.20)$$

où \mathbf{H} est la matrice de Hill qui s'écrit :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} F & -G & 0 \\ -G & F & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

F , G et L sont donc les trois paramètres inconnus caractérisant le critère de plasticité. Comme dans le cas élastique, nous considérons que les deux axes d'orthotropie

ont le même comportement. Au cours de la déformation, l'évolution du seuil de plasticité (Σ_Y) est inconnue. Pour les trois cas expérimentaux, le repère du chargement de la cellule est tournée par rapport au repère de la cellule. Le calcul de la contrainte scalaire de Hill ($\Sigma^T \mathbf{H} \Sigma$) est calculé dans le repère de la cellule grâce à la matrice de rotation (\mathbf{B}) :

$$f(\Sigma) = [\Sigma^T \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{H} \mathbf{B}_\theta \Sigma]^{1/2} - \Sigma_Y. \quad (4.22)$$

Quand le matériau homogène équivalent plastifie, la fonction f est nulle. La résolution de l'équation 4.22 est détaillée dans l'Annexe B et donne une relation scalaire dépendant des paramètres de la matrice de Hill et du seuil de plasticité. Ces trois équations, correspondantes respectivement aux angles de 0 degré, 45 et 30 degrés, sont réécrites ci-dessous :

$$(\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2) \mathbf{F} - 2\Sigma_x \Sigma_y \mathbf{G} + \Sigma_{xy}^2 \mathbf{L} = \Sigma_Y^2 \quad (4.23)$$

$$\left[\frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y)^2 - \Sigma_{xy}^2 \right] \mathbf{F} - \left[-\frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y)^2 - \Sigma_{xy}^2 \right] \mathbf{G} + \frac{1}{2}(\Sigma_x - \Sigma_y)^2 \mathbf{L} = \Sigma_Y^2 \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{5}{8}(\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2) + \frac{3}{4}\Sigma_x \Sigma_y + \frac{\sqrt{6}}{4}\Sigma_{xy}(\Sigma_x - \Sigma_y) - \frac{3}{4}\Sigma_{xy}^2 \right] \mathbf{F} + \\ & \left[-\frac{3}{8}(\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2) - \frac{5}{4}\Sigma_x \Sigma_y + \frac{\sqrt{6}}{4}\Sigma_{xy}(\Sigma_x - \Sigma_y) - \frac{3}{4}\Sigma_{xy}^2 \right] \mathbf{G} + \\ & \left[\frac{3}{8}(\Sigma_x - \Sigma_y)^2 + \frac{\sqrt{6}}{4}\Sigma_{xy}(\Sigma_y - \Sigma_x) + \frac{1}{4}\Sigma_{xy}^2 \right] \mathbf{L} = \Sigma_Y^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

L'Équation 4.23, où le repère de la cellule est le même que celui du chargement, sera utilisée pour les simulations numériques de la cellule unitaire. Les Équations 4.24 et 4.25 seront utilisées pour les cas d'inclinaison du réseau architecturé à 30 et 45 degrés.

4.4.2.1 Identification de la matrice de Hill

Le calcul du critère de Hill se fait dans un premier temps en laissant libre l'évolution des coefficients de la matrice \mathbf{H} avec la déformation plastique. L'Équation 4.20 est résolue en normant par la valeur du seuil de plasticité après avoir mis au carré, c'est-à-dire :

$$\Sigma^T \mathbf{B}_\theta^T \frac{\mathbf{H}}{\Sigma_Y^2} \mathbf{B}_\theta \Sigma = 1 \quad (4.26)$$

Ainsi, l'identification de la matrice ($\mathbf{H}_c = \frac{\mathbf{H}}{\Sigma_Y^2}$) nous donnera les valeurs des paramètres de la matrice. Le seuil de plasticité sera égal à l'inverse de la racine carrée du paramètre F donné par l'équation suivante :

$$\Sigma_Y = \frac{1}{\sqrt{F}}. \quad (4.27)$$

Les coefficients de la matrice \mathbf{H} seront donnés par :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}_c}{\mathbf{H}_c(1, 1)} \quad (4.28)$$

L'identification de ces paramètres se fait par une minimisation aux moindres carrés avec une équation par niveau de déformation plastique pour chaque simulation (les simulations des expériences à 30 et 45 degrés auxquelles s'ajoutent les cas numériques en traction et cisaillement biaxiales). Les états de déformations homogénéisées de chaque simulation sont différents à chaque pas (nous ne savons pas piloter les simulations numériques en déformation plastique homogénéisée au sens de Von Mises). Ainsi le nombre de pas des simulations est choisi très grand (une centaine visible sur la Figure ??) afin d'obtenir beaucoup d'états de déformation homogénéisées. Il est donc choisi de conserver les états de déformations où toutes les simulations ont des déformations homogénéisées dans la cellule très similaires.

L'évolution du seuil de plasticité Σ_Y , du paramètre G et du paramètre L en fonction de la déformation plastique de Von Mises sont tracées sur la Figure 4.4. Le premier état de déformation plastique utilisé est celui présenté sur les surfaces de charges. Il correspond à une déformation plastique de Von Mises égale à 1,7%. L'évolution du seuil de plasticité (Figure 4.4(a)) a une allure classique dans le cas des aciers avec une tangente tendant vers l'horizontale quand la déformation plastique augmente au-delà de 15%.

Les évolutions des paramètres de la matrice de Hill (Figures 4.4(b) et 4.4(c)) montrent une dépendance des paramètres à la déformation plastique. Le paramètre L passe de 3.5 à 5 lorsque la déformation plastique atteint 13%. Au delà de cette déformation plastique, le paramètre ne varie plus et reste constant. Le même constat est fait pour le paramètre G qui passe d'une valeur de 0.6 à 0.44. Le paramètre F est toujours égal à 1 pour calculer le seuil de plasticité du matériau homogène équivalent. Remarquons que dans le cas d'un critère de plasticité de Von Mises, les valeurs des paramètres F , G et L sont fixées à $L = 3F = 6G$. Le rapport G/F directement tracé sur la Figure 4.4(c) coupe cette valeur pour une déformation plastique égale à 8%. Lorsque le rapport G/F est supérieur à 0.5 l'ellipse du critère est plus écrasée.

Nous remarquons aussi que le rapport L/F , qui devrait être égal à 3 dans le cas isotrope est nettement supérieur ici. Nous retrouvons donc des propriétés similaires à l'élasticité où le module de cisaillement homogénéisé est supérieur à la valeur isotrope. C'est sur le cisaillement que le matériau est le plus faible en plasticité.

4.4.2.2 Identification du seuil de plasticité

Dans l'identification précédente, la matrice de Hill varie avec la déformation plastique. Habituellement pour les critères, il est recherché une valeur fixe de la matrice de Hill qui est utilisée pour tous les états de déformation. Cette fois, la matrice de Hill est fixé indépendamment de la déformation plastique. Les inconnues du système sont donc le seuil de plasticité et la matrice de Hill constante. La valeur

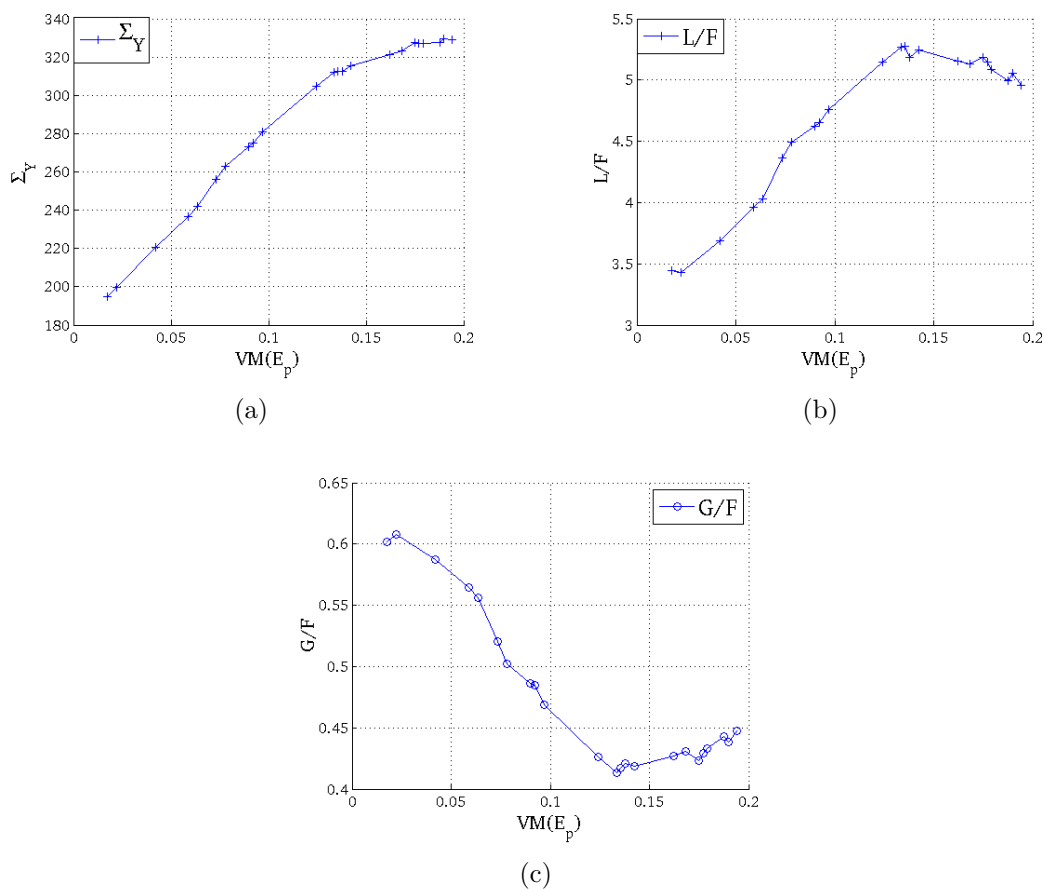


FIGURE 4.4 – (a) Évolution du rapport du seuil de plasticité Σ_Y (Figure a), du paramètre L (Figure b) et du paramètre G (Figure c) en fonction de la déformation plastique de Von Mises.

du premier seuil de plasticité (égal à la limite élastique noté Σ_{Yo}) est donc imposée à 1. Deux équations différentes sont à résoudre, la première au premier état de plastification, la seconde pour les états de déformation suivants :

$$\begin{cases} \Sigma^T B_\theta^T \frac{H}{\Sigma_{Yo}^2} B_\theta \Sigma = 1 \\ \Sigma^T B_\theta^T \frac{H}{\Sigma_{Yo}^2} B_\theta \Sigma = \frac{\Sigma_Y}{\Sigma_{Yo}} \end{cases} \quad (4.29)$$

L'identification des paramètres se fait toujours par une minimisation aux moindres carrés avec les mêmes simulations et niveaux de déformation plastique. L'évolution des paramètres identifiés en fonction de l'intensité de la déformation plastique de Von Mises est présentée sur la Figure 4.5. Cinq identifications des paramètres ont été réalisées. La première identification restreint l'intervalle des déformations plastiques à $[1,7 - 7,5\%]$, la seconde identification à l'intervalle $[1,7 - 10\%]$ et ainsi de suite jusqu'à l'intervalle $[1,7 - 17,5\%]$. Les points correspondants aux identifications de la matrice de Hill (G et L) sont tracés sur les courbes avec l'abscisse correspondant au maximum de l'intervalle de déformation plastique utilisé. Le calcul des paramètres G et L de la matrice de Hill et du seuil de plasticité sont donnés par les Équations 4.28 et 4.27.

L'évolution des paramètres de la matrice G et L est présentée sur la Figure 4.5(a) et 4.5(b). La valeur de ces paramètres dépend fortement de l'intervalle de déformation plastique utilisé. Le paramètre G diminue de 15% alors que le paramètre L augmente de 30% quand l'intervalle de déformation plastique augmente. Les valeurs calculées ici présentent moins de variation que lorsque les coefficients de la matrice de Hill varient avec la déformation plastique.

L'évolution du seuil de plasticité identifié pour chaque intervalle est présentée sur la Figure 4.5(c). Les courbes bleue, magenta, noire, turquoise et rouge, correspondent respectivement au premier intervalle, deuxième, troisième et quatrième dernier intervalle de déformation plastique utilisé. En augmentant l'intervalle de déformation plastique, le seuil de plasticité du critère conserve la même évolution (augmentation du seuil avec la déformation plastique dictée par une loi non linéaire en puissance). L'augmentation de l'intervalle de déformation plastique augmente la valeur du seuil de plasticité (de 202 MPa à 222 MPa). Cette augmentation est due à l'identification de la matrice de Hill qui varie suivant l'intervalle choisi. Plus l'intervalle de déformation plastique est grand, plus le seuil de plasticité est important.

4.4.3 Critère de Drucker-Prager

4.4.3.1 Prise en compte des contraintes hydrostatiques

Un acier inoxydable a une surface de charge identique en traction et en compression. La surface de charge complète avec des sollicitations biaxiales en compression est présentée sur la Figure 4.6. Les points avec les symboles Δ représentent ces sollicitations. Il faut ajouter au critère le premier invariant des contraintes (la trace

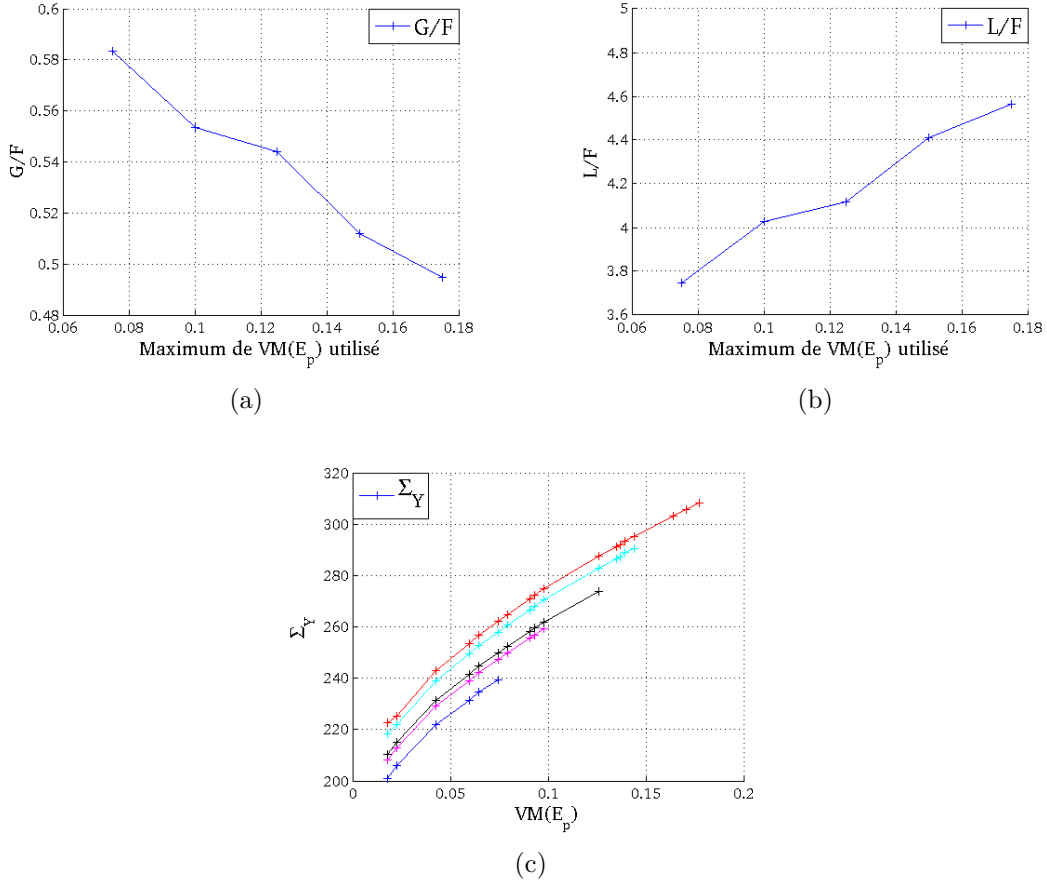


FIGURE 4.5 – (a) Évolution du seuil de plasticité Σ_Y en fonction de la déformation plastique de Von Mises ; Évolution du paramètre L (b) et du paramètre G (c) en fonction du maximum de déformation plastique utilisé pour l'intervalle de déformation plastique (valeur égale à 7.5 , 10 , 12.5 , 15 ou 17.5 % de déformation plastique).

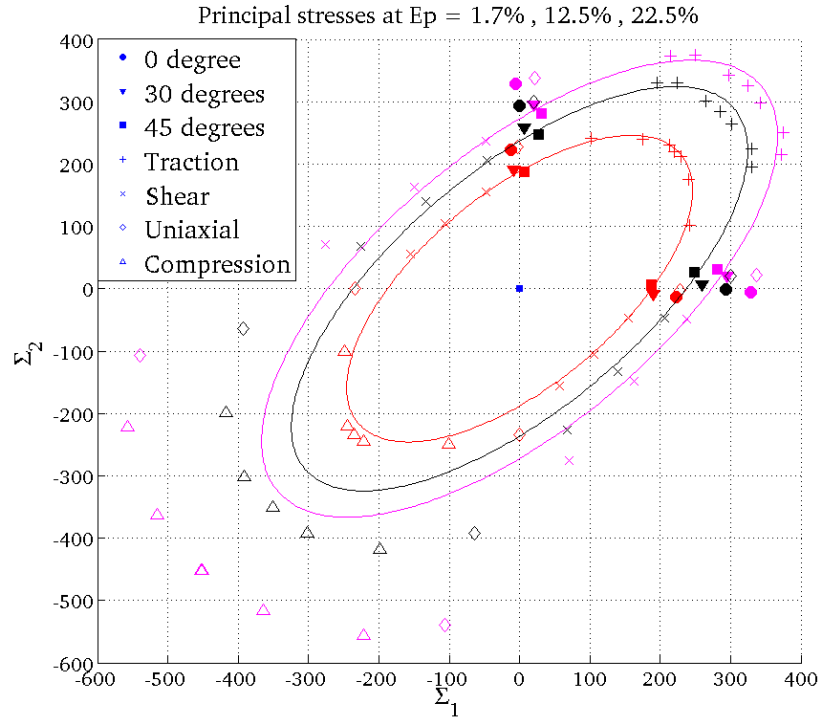


FIGURE 4.6 – Points représentant la surface de charge de la cellule sous différentes sollicitations (trois expériences + sollicitations fictives). Points donnés pour la déformation plastique scalaire (Von Mises) égale à 1.7% (points en rouge), 12.5% (points en noir) et 22.5% (points en magenta).

du tenseur des contraintes) pour prendre en compte les effets géométriques du trou. Pour une déformation plastique très faible (courbe rouge à 1.7%), les points en compression sont encore proches de la surface de charge des simulations en traction mais lorsque la déformation plastique augmente, les points s'écartent significativement de la surface de charge.

4.4.3.2 Prise en compte de la pression hydrostatique

Pour le MHE représentant la cellule, la pression hydrostatique a donc un effet sur le comportement plastique en traction et compression. Le critère de plasticité de Drucker-Prager est une combinaison linéaire des deux premiers invariants (la trace et la contrainte équivalente (J) de Von Mises) du tenseur des contraintes [LEM 09]. Ce critère s'écrit :

$$f(\Sigma) = (1 - \alpha J) + \alpha Tr(\Sigma) - \Sigma_Y. \quad (4.30)$$

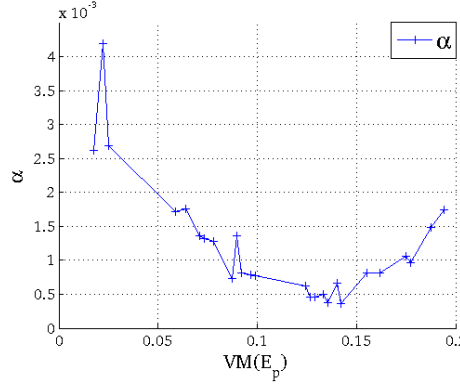


FIGURE 4.7 – Évolution du paramètre α en fonction de la déformation plastique de Von Mises.

La contrainte équivalente de Von Mises est remplacée, comme précédent, par la contrainte équivalente de Hill. Le critère de plasticité de Tsai-Hill s'écrit donc :

$$f(\Sigma) = [\Sigma^T \mathbf{H} \Sigma]^{1/2} + \alpha \left((Tr(\Sigma) - [\Sigma^T \mathbf{H} \Sigma]^{1/2}) - \Sigma_Y \right), \quad (4.31)$$

où α et Σ_Y sont les inconnus à calculer.

Calcul du paramètre α : dans un premier temps, nous utilisons la matrice de Hill et le seuil de plasticité identifiés dans la Section 4.4.2 à chaque état de déformation pour les simulations biaxiales en traction et en cisaillement. L'identification du critère de Drucker-Prager modifié a pour but de montrer la validité du critère de Hill plastique pour le MHE de la cellule en traction/cisaillement. Le calcul du paramètre α à chaque état de déformation est fait avec une minimisation aux moindres carrés en résolvant le système construit sur la résolution de l'équation 4.31 sous la forme :

$$\left((Tr(\Sigma) - [\Sigma^T \mathbf{H} \Sigma]^{1/2}) \right) \alpha = \Sigma_Y - [\Sigma^T \mathbf{H} \Sigma]^{1/2}. \quad (4.32)$$

Le paramètre α est identifié pour chaque état de déformation des simulations en traction et cisaillement biaxiales et les deux expériences à 30 et 45 degrés. Le premier état de déformation plastique utilisé correspond toujours à une déformation plastique de Von Mises égale à 1,7%.

L'évolution du paramètre α en fonction de la déformation plastique de Von Mises est présentée sur la Figure 4.7. Dans le cas général du critère de Drucker-Prager, le paramètre α doit avoir une valeur comprise dans l'intervalle $[0, 0.5]$. Dans le cas des simulations en traction/cisaillement, le paramètre α a une valeur très faible (inférieure à $4 \cdot 10^{-3}$) qui montre que le premier invariant du tenseur des contraintes n'a aucun effet sur le critère. Le critère de Hill est donc suffisant pour décrire le comportement plastique du MHE en traction/cisaillement.

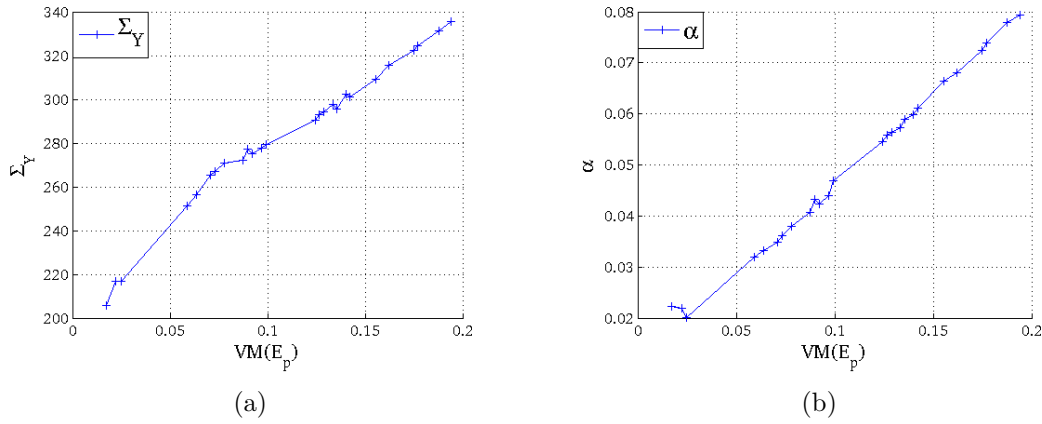


FIGURE 4.8 – Évolution du seuil de plasticité (a) et du paramètre α (b) en fonction de la déformation plastique de Von Mises.

Prise en compte de la compression : le comportement homogénéisé de la cellule unitaire est dissymétrique en traction-compression. La résolution de l'Équation 4.31 est faite avec les inconnues que sont paramètre α (dépendant de la déformation plastique) et le critère de plasticité Σ_Y :

$$\left((Tr(\Sigma) - [\Sigma^T H \Sigma]^{1/2}) \alpha - \Sigma_Y \right) = - [\Sigma^T H \Sigma]^{1/2}, \quad (4.33)$$

Les paramètres sont identifiés par une minimisation aux moindres carrés pour chaque état de déformation des simulations en traction, cisaillement et compression biaxiales. Le premier état de déformation plastique est inchangé avec une déformation plastique de Von Mises égale à 1,7%.

L'évolution du seuil de plasticité Σ_Y et du paramètre α en fonction de la déformation plastique de Von Mises est présentée sur la Figure 4.8. Le paramètre α (Figure 4.8(b)) a une valeur non négligeable (supérieur à 0.02) qui montre l'effet du premier invariant des contraintes sur le critère de plasticité. La valeur du paramètre augmente avec la déformation plastique (α atteint 0.1) montrant que son effet est de plus en plus important. En effet, sur la Figure 4.6, la surface de charge est de plus en plus dissymétrique entre la traction et la compression. L'évolution du seuil de plasticité (Figure 4.8(a)) est similaire aux seuils de plasticité obtenus avec le critère de Hill. Par rapport au critère de Hill, la valeur du seuil de plasticité est un peu supérieure augmentant de 204 MPa à 336 (par rapport à l'intervalle [196, 325] pour le critère de Hill).

Calcul du critère avec α constant : dans l'identification précédente, le paramètre α varie avec la déformation plastique. Habituellement pour les critères, une valeur fixe de la matrice de Hill et α est recherché. La résolution de l'Équation 4.31

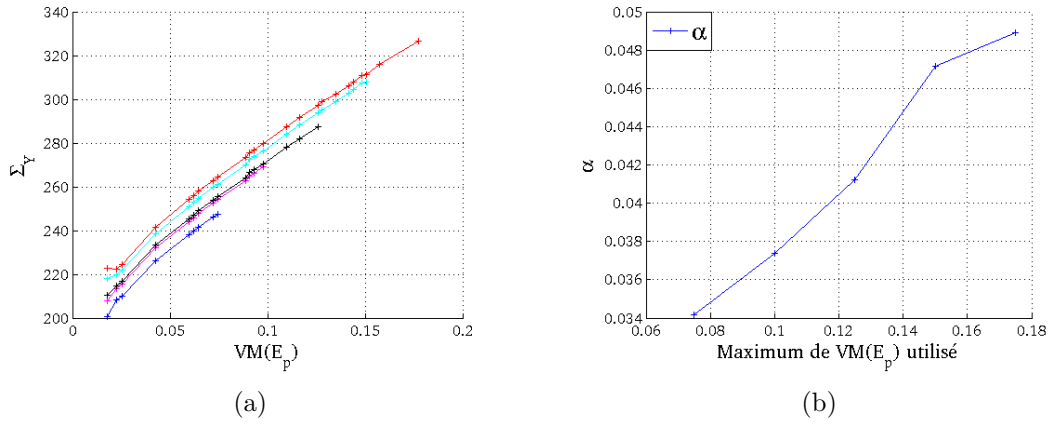


FIGURE 4.9 – Évolution du seuil de plasticité (a) et du paramètre α (b) en fonction de la déformation plastique de Von Mises.

est faite avec le paramètre α constant et le critère de plasticité Σ_Y comme inconnu. Le système suivant est obtenu, la première équation correspond au premier état de déformation plastique et la seconde aux états de déformation plastique suivants :

$$\begin{cases} \left(Tr(\Sigma) - [\Sigma^T H \Sigma]^{1/2} \right) \frac{\alpha}{\Sigma_{Y0}} = - [\Sigma^T H \Sigma]^{1/2} + 1 \\ \left(Tr(\Sigma) - [\Sigma^T H \Sigma]^{1/2} \right) \frac{\alpha}{\Sigma_{Y0}} - \frac{\Sigma_Y}{\Sigma_{Y0}} = - [\Sigma^T H \Sigma]^{1/2} \end{cases} \quad (4.34)$$

Les paramètres sont identifiés par une minimisation aux moindres carrés pour chaque état de déformation des simulations en traction, cisaillement et compression biaxiales. Le premier instant de déformation plastique est inchangé avec une déformation plastique de Von Mises égale à 1,7%. Cinq identifications des paramètres sont réalisées, sur les cinq intervalles de déformation plastique présentés précédemment.

L'évolution du seuil de plasticité et du paramètre α en fonction du maximum de la déformation plastique de Von Mises considéré est présentée sur la Figure 4.9. Le seuil de plasticité (Figure 4.9(a)) a une évolution similaire au seuil de plasticité calculé avec le critère de Hill (Figure 4.5(c)). Le paramètre α a une valeur non négligeable (Figure 4.9(b)) démontrant la nécessité de prendre en compte le premier invariant du tenseur des contraintes. Plus l'intervalle de déformation plastique utilisé est grand, plus la valeur de α augmente traduisant une distorsion de plus en plus importante de la surface de charge.

4.4.4 Calcul de la loi d'écrouissage

Nous choisissons une loi d'écrouissage identique à celle du matériau homogène de base. L'écrouissage est non-linéaire avec une évolution en loi puissance. L'évolution du seuil de plasticité en fonction de la déformation plastique équivalente de Von Mises notée E_p est donnée par :

$$\Sigma_Y = H E_p + \Sigma_{Yo} \left(1 + \frac{E_p}{E_c} \right)^\delta, \quad (4.35)$$

où les paramètres H , Σ_{Yo} , E_c et δ sont inconnus. Pour identifier ces paramètres, une condition supplémentaire est ajoutée sur la loi d'écrouissage pour assurer la continuité du comportement avec le domaine linéaire. La dérivée du seuil de plasticité en fonction de la déformation plastique à la fin du domaine linéaire est égale à :

$$\left(\frac{\partial \Sigma_Y}{\partial E_p} \right)_{(E_p=0)} = E. \quad (4.36)$$

La résolution de l'Équation 4.36 permet de calculer le facteur d'échelle E_c en fonction des autres paramètres et du module de Young comme suit :

$$E_c = \frac{\Sigma_{Yo} \delta}{E - H} \quad (4.37)$$

L'identification de ces paramètres se fait avec un algorithme de type Nelder-Mead (présenté dans la Section 2.2.3.3). Les paramètres de la loi d'écrouissage sont identifiés pour les critères de Hill et de Drucker-Prager modifié et les valeurs sont présentées dans la Table 4.2. Les différents cas d'identification sont les suivants :

- Le premier cas est le critère de Hill identifié avec des sollicitations en traction/cisaillement biaxiales présenté dans la Section 4.4.2.1. Dans ce cas, la matrice de Hill \mathbf{H} dépend de la déformation plastique.
- Le deuxième cas est le critère de Hill identifié avec les mêmes sollicitations et une matrice de Hill constante, présenté dans la Section 4.4.2.2. Nous choisissons l'intervalle de déformation plastique le plus grand pour le calcul du seuil de plasticité afin d'identifier les paramètres de la loi d'écrouissage.
- Le troisième cas est le critère de Drucker-Prager avec des sollicitations en traction/cisaillement/compression biaxiales présenté dans la Section 4.4.3.2. Dans ce cas, le paramètre α comme la matrice de Hill dépendent de la déformation plastique.
- Le dernier cas est le critère de Drucker-Prager avec les mêmes sollicitations présenté dans la Section 4.4.3.2. La matrice de Hill et le paramètre α sont de plus constants par rapport à la déformation plastique. Les paramètres de la loi d'écrouissage sont identifiés à partir de l'intervalle de déformation plastique le plus grand.

Paramètres	H (MPa)	Σ_{Y_o} (MPa)	δ	E_c
Critère de Hill avec $\mathbf{H}(E_p)$	268	110	0,12	$1,29 \cdot 10^{-4}$
Critère de Hill avec \mathbf{H}	293	147	0,075	$1,07 \cdot 10^{-4}$
Critère de Drucker-Prager avec $\alpha(E_p)$	328	114	0,117	$1,28 \cdot 10^{-4}$
Critère de Drucker-Prager avec α	513	158	0,052	$8 \cdot 10^{-5}$
Loi à l'échelle microscopique	1480	284	0,042	10^{-5}

TABLE 4.2 – Paramètres de la loi d'écrouissage identifié avec le critère de Hill puis avec le critère Drucker-Prager modifié.

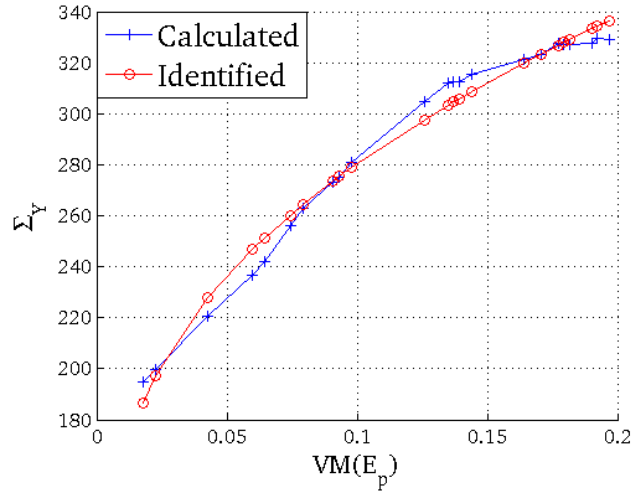


FIGURE 4.10 – Identification des paramètres de la loi d'écrouissage par l'algorithme de Nelder-Mead.

Par rapport à la loi du matériau à l'échelle microscopique, la plastification de la cellule apparaît beaucoup plus rapidement. La limite d'élasticité est divisée par un facteur supérieur à 2 (de 284 MPa aux alentours de 110 MPa). La limite élastique est liée à la section effective de la cellule unitaire, un facteur 0.5 (rapport entre la section totale et la section effective en enlevant le trou) devrait *a priori* être trouvé. Les deux critères avec une matrice de Hill et un paramètre α constants estiment assez bien ce facteur (0.5 et 0.55) alors que les critères dépendant de la déformation plastique le sous-estiment (0.39 et 0.40).

L'évolution du seuil de plasticité identifié (courbe rouge) pour le critère de Hill avec une matrice dépendant de la plastique (courbe bleue) est tracée sur la Figure 4.10. Lorsque la matrice de Hill n'est pas constante, l'identification du seuil de plasticité est bruitée menant à une identification de la loi d'écrouissage moins précise.

Le coefficient linéaire d'écrouissage H est fortement diminué, passant de 1480 MPa à environ 300 MPa. Cela signifie que le seuil de plasticité augmente linéairement moins avec la déformation plastique par rapport à la loi d'origine du matériau.

L'exposant d'écrouissage δ et le facteur d'échelle E_c restent eux assez constants pour le matériau homogène équivalent.

4.5 Synthèse

Le remplacement d'une cellule unitaire périodique par un milieu homogène équivalent permet de diminuer très significativement le temps de calcul des méthodes FE^2 pour les cellules ayant une cinématique de déformation identique. Le comportement du matériau homogène n'est plus isotrope alors qu'il l'est à échelle microscopique. Les trous apportent des non linéarités géométriques. Dans le domaine élastique, le MHE a un comportement cubique où les deux axes d'orthotropie ont la même raideur. Le coefficient de Poisson ne change pas alors que le module de cisaillement présente un écart à l'isotropie de l'ordre de 10%. Ces paramètres élastiques du MHE ont été identifiés par deux approches, l'une reposant sur les expériences et la seconde sur l'homogénéisation classique qui a permis de montrer que la famille des chargements expérimentaux n'est pas libre.

Le calcul du comportement plastique nécessite des simulations numériques supplémentaires pour obtenir la surface de charge complète du MHE. Comme précédemment, l'orthotropie du matériau à l'échelle macroscopique nous fait choisir le critère de Hill pour caractériser le comportement plastique qui se fait à volume constant. Pour les sollicitations en traction et cisaillement, un critère de Hill a été étudié et validé. Il est ensuite montré avec des sollicitations biaxiales en compression que le comportement du MHE est différent. Le critère de Tsai-Hill, qui fait intervenir le premier invariant du tenseur des contraintes en plus du second, a donc été utilisé pour prendre en compte la pression hydrostatique.

Deux approches ont été menées en parallèle pour étudier la plasticité : la première en supposant la matrice de Hill et la paramètre α variable avec la déformation plastique et la seconde avec la matrice de Hill et α constant. Le seuil de plasticité des différents critères est ainsi obtenu. La forme de la loi d'écrouissage du 304L est réutilisée : un écrouissage linéaire et un écrouissage en puissance. Cette loi est identifiée et comparée pour chaque critère de plasticité étudié. Les résultats donnés pour le critère de Hill et de Tsai-Hill donnent de meilleurs résultats en terme de limite élastique si les paramètres sont supposés constants sur l'intervalle de sollicitation.

Chapitre 5

Vers la localisation de la déformation

Ce chapitre traite de la localisation des déformations des cellules unitaires qui mène à la fissuration de la zone architecturée et la rupture de l'éprouvette. Une éprouvette avec une zone architecturée carrée réduite a été construite. Deux méthodes de calcul du saut de déplacement induit par la localisation sont présentées : la première à partir d'une corrélation d'images avec des éléments finis étendus à l'échelle macroscopique, la seconde à partir du résultat de la corrélation d'images microscopique. Le support de la localisation est identifié par la transformée de Radon puis un saut de déplacement est calculé en enrichissant la cinématique de la cellule avec une discontinuité. Ces sauts de déplacements sont ensuite comparés aux sauts de déplacements mesurés à l'échelle macroscopique pour valider la méthode sur un pré-essai. La seconde partie du chapitre est l'application de ces méthodes à l'éprouvette avec la zone architecturée non inclinée où la fissure passe par la rangée horizontale centrale de la zone architecturée.

Sommaire

5.1	Introduction	119
5.2	Géométrie et corrélation d'images sur un pré-essai	119
5.2.1	Géométrie de l'éprouvette	119
5.2.2	Résultat de la corrélation d'images microscopique	120
5.2.3	Corrélation d'images étendue à l'échelle macroscopique	121
5.2.4	Résidu de corrélation d'images	122
5.3	Calcul du saut de déplacement sur le pré-essai	123
5.3.1	Critère de localisation	123
5.3.2	Analyse de la position de la localisation	127
5.3.3	Calcul du saut de déplacement microscopique	128
5.3.4	Calcul du saut de déplacement normal à la ligne de localisation	130
5.3.5	Bilan	131
5.4	Application sur l'éprouvette à 0 degrés	133
5.4.1	Critère de localisation	133
5.4.2	Analyse de la position de la localisation	134
5.4.3	Saut de déplacement microscopique	135
5.4.4	Corrélation d'images étendue	138
5.5	Synthèse	139

5.1 Introduction

Le Chapitre 4 a montré que le remplacement des cellules unitaires avec une cinématique périodique par un milieu homogène équivalent dans le domaine linéaire et non-linéaire est possible. Dans le domaine non-linéaire, les déformations finissent par se localiser dans certaines cellules unitaires et mènent à la rupture de la zone architecturée. La localisation des déformations à l'échelle microscopique a une largeur faible devant la longueur de la cellule unitaire. Cette localisation ne peut pas être prise en compte dans les méthodes multi-échelles FE^2 classiques. C'est pour cela que plusieurs auteurs ont décidé d'enrichir le milieu macroscopique avec une discontinuité ce qui permet de lier la localisation des déformations à l'échelle microscopique à la fissure macroscopique [COE 12, BEL 08, MAS 07].

Le but de ce chapitre est de calculer le saut de déplacement expérimental extrait de la localisation des déformations à l'échelle microscopique. L'idée est de mettre au point une méthodologie en s'appuyant sur les résultats du déplacement mesuré sur l'éprouvette non inclinée. L'évolution de la localisation des déformations peut être suivie expérimentalement de son apparition jusqu'à la fissuration de la zone architecturée. Un essai avec une zone architecturée plus simple et plus petite a été mis en place pour mettre au point les outils d'analyse.

La Section 5.2 présente la géométrie de cette zone architecturée simple créée. Les résultats de la corrélation d'images classique à l'échelle microscopique et de la corrélation d'images étendue à l'échelle macroscopique sont détaillés. Le calcul du saut de déplacement à partir de l'échelle microscopique est effectué dans la Section 5.3 avec une présentation du critère de localisation et de la transformée de Radon. Enfin ces développements sont appliqués à l'éprouvette avec la zone architecturée non inclinée dans la Section 5.4.

5.2 Géométrie et corrélation d'images sur un pré-essai

5.2.1 Géométrie de l'éprouvette

Cette éprouvette a été créée à partir du même matériau, l'acier inoxydable 304L dont le comportement est présenté dans la Section 2.2.2. La géométrie de la zone architecturée de la plaque (d'épaisseur 1 mm) est choisie carrée. Comme pour l'éprouvette avec la zone architecturée non inclinée, les axes horizontal et vertical sont choisis pour générer le réseau de trous. Chaque ligne horizontale ou verticale de la zone architecturée contient dix trous dans sa longueur. Le diamètre du trou et la distance inter-trous sont fixés à 1 mm. La géométrie de la structure architecturée et la direction de chargement macroscopique, selon l'axe horizontal, sont représentées sur la Figure 5.1. Le dessin technique de la structure totale de l'éprouvette avec les spécifications géométriques est donné sur la Figure E.2 (Annexe E). Les images ont

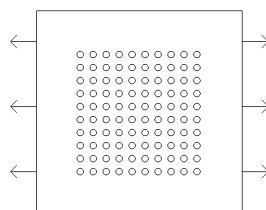


FIGURE 5.1 – Schématisation de la géométrie et des conditions aux limites de l'éprouvette.

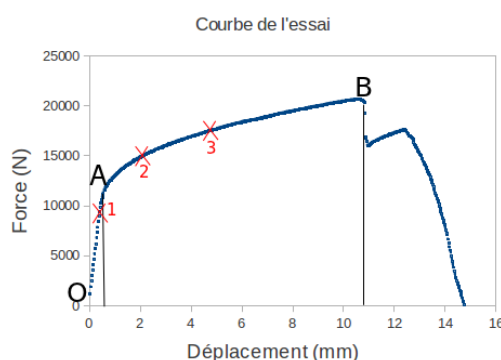


FIGURE 5.2 – Courbe de l'effort en fonction du déplacement machine. Les points 1, 2 et 3 représentent les trois instants choisis pour regarder les champs de déformation calculés par DIC.

été réalisées avec une caméra de résolution 4.2 millions de pixels, soit 2048x2048 pixels. Une cellule unitaire a une taille de 112x112 pixels, la dimension d'un pixel est donc 0.018 *mm*

La vitesse de déplacement de la traverse est égale à 0.2 *mm* par minute dans le domaine de réponse linéaire et ensuite égale à 2 *mm* par minute dans le domaine non-linéaire jusqu'à rupture. La courbe de l'effort en fonction du déplacement est représentée sur la Figure 5.2.

5.2.2 Résultat de la corrélation d'images microscopique

Comme précédemment, la maillage à l'échelle microscopique est assemblé à partir du maillage d'une cellule élémentaire. Celui-ci est composé d'éléments triangulaires à un point de Gauss, chaque bord contient dix nœuds et le périmètre du trou est lui composé de douze nœuds. Le maillage macroscopique est construit comme dans la Section 2.3.4 où un élément quadrangle avec quatre points de Gauss représente une cellule élémentaire.

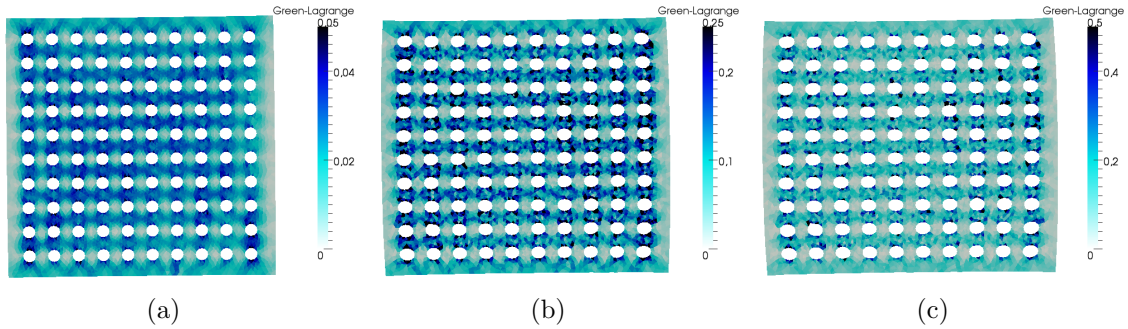


FIGURE 5.3 – Visualisation du champ de déformation scalaire au sens de von Mises de la DIC microscopique aux trois instants choisis. Déformation longitudinale de la zone architecturée égale à 1.5% (a), 6.8% (b) et 9.6% (c).

Le champ de déformation scalaire de von Mises à l'échelle microscopique est présenté sur la Figure 5.3. Le champ de déformation scalaire des trois instants choisis sur la courbe 5.2 est tracée de gauche à droite. Le premier instant de déformation choisi appartient au domaine linéaire de la réponse macroscopique de la plaque. Le second instant de déformation est placé au début du domaine de réponse non-linéaire et le troisième instant est placé plus loin dans le domaine non-linéaire avant la fissuration de la zone architecturée.

Au premier instant (Figure 5.3(a)), la déformation dans les cellules élémentaires est assez répétitive et ne présente pas de localisation. Un effet d'écran est obtenu dans les lignes horizontales du réseau comportant les trous c'est-à-dire que la déformation est plus faible dans ces zones. Au contraire, les déformations sont bien plus importantes dans les ligaments horizontaux qui ne sont pas "protégés" par les trous. Pour toutes les cellules, le trou central fait que les déformations se concentrent autour de celui-ci.

Au second instant de déformation (Figure 5.3(b)), l'intensité des déformations dans les cellules unitaires varie suivant sa position dans la zone architecturée. Les cellules des colonnes de gauche et droite concentrent les plus grandes déformations, cela est dû à la géométrie en carrée de la zone architecturée. Au troisième instant de déformation choisi (Figure 5.3(c)), les cellules de la colonne de droite paraissent concentrer la déformation. C'est donc à l'intérieur de cette colonne que va apparaître la zone de la localisation menant à la rupture de la zone architecturée puis du matériau homogène.

5.2.3 Corrélation d'images étendue à l'échelle macroscopique

Contrairement à la Section 2.3.5.1 où l'échelle macroscopique a été traité avec une corrélation d'images classique, nous nous intéressons ici à la localisation

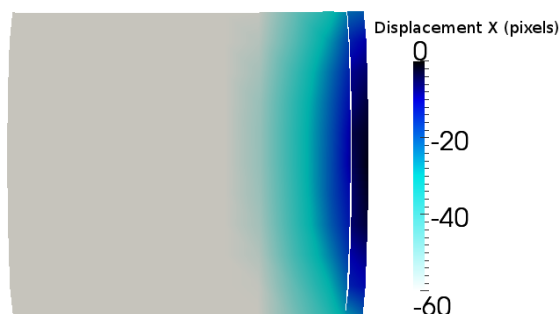


FIGURE 5.4 – Champ de déplacement longitudinal obtenue par X-DIC où la fissure est insérée *a posteriori* grâce à la connaissance de sa position.

Échelle	Microscopique	Macroscopique
Moyenne (niveaux gris)	4.13	5.4

TABLE 5.1 – Résidu moyen de la corrélation d’images en niveau de gris.

des déformations. L’échelle macroscopique est donc traitée grâce à la corrélation d’images étendue (*X-DIC*) présentée dans l’Annexe D. Le champ de déplacement calculé par la corrélation d’images est enrichi grâce à l’ajout de fonctions de forme de discontinuité permettant ainsi de calculer le saut de déplacement du à la localisation dans la zone architecturée. Le champ de déplacement longitudinal calculé par la corrélation d’images étendue est présenté sur la Figure 5.4.

5.2.4 Résidu de corrélation d’images

Les champs du résidu des corrélations d’images microscopique et macroscopique sont tracés sur la Figure 5.5. Les niveaux de gris de l’image ont une dynamique de $[0\ 255]$. Le champ du résidu est quant à lui tracé sur l’intervalle en niveau de gris égal à $[0\ 20]$. A l’instar des résultats précédents sur les éprouvettes trouées, le résidu est le plus élevé autour des trous du réseau pour les deux corrélations d’images. Nous pouvons aussi remarquer en comparant le résidu à l’échelle microscopique de l’éprouvette non inclinée (Figure 2.17(b)) que le résidu est plus important dans les ligaments où les trous font écran au chargement, c’est-à-dire à l’intérieur des ligaments horizontaux contenant les trous sur la Figure 5.5(b).

La moyenne du résidu en niveaux de gris des corrélations d’images macroscopique et microscopique est donnée dans la Table 5.1. Dans la zone d’intérêt complète, la valeur moyenne du résidu est similaire et très faible (4 et 5 niveaux de gris). Elle est plus élevée pour l’échelle macroscopique puisque la corrélation à l’échelle macroscopique ne peut pas capturer la cinématique de déformation de la microstructure. Cette valeur montre que la corrélation d’images est de bonne qualité.

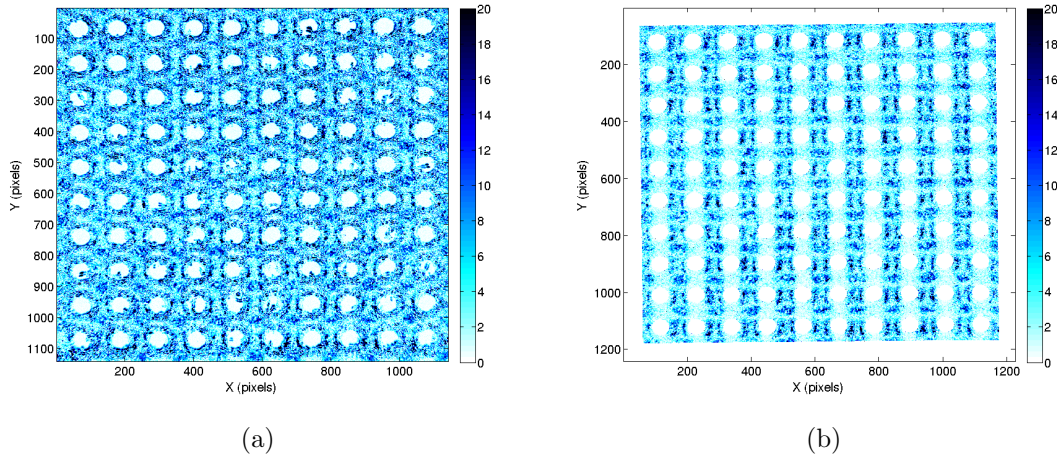


FIGURE 5.5 – Résidu en niveau de gris (pour une dynamique $[0\ 255]$) de la corrélation d'images macroscopique avec introduction de la fissure (a) et de la corrélation d'images microscopique (b) avec une déformation moyenne de la ZOI égale à 24%.

5.3 Calcul du saut de déplacement sur le pré-essai

Le saut de déplacement induit par la localisation des déformations est calculé aux deux échelles. A partir des résultats de la corrélation d'images à l'échelle microscopique, une stratégie de calcul est élaborée pour identifier ce saut avec un enrichissement du déplacement. On donne un critère d'apparition expérimental de la localisation dans les cellules unitaires. Ensuite, la position du support de la localisation est calculée en s'appuyant sur la corrélation d'images à l'échelle microscopique. Enfin le saut de déplacement normal à la localisation est calculé en introduisant un enrichissement des méthodes *X-FEM*.

Le saut de déplacement est aussi obtenu directement avec une corrélation d'images étendue à l'échelle macroscopique. La fissure est introduite préalablement au calcul de corrélation. Une comparaison de la valeur maximale le long de la fissure de ces deux sauts de déplacements est enfin réalisée.

5.3.1 Critère de localisation

Champ de déformations plastique cumulée : Le champ de déformations de Green-Lagrange est obtenu à partir de la corrélation d'images à l'échelle microscopique. Le champ de déformation de von Mises est calculé avec l'Équation 2.5 de la Section 2.3.5. Notre étude porte sur la localisation des déformations dans le domaine non-linéaire : la localisation des déformations se produit dans ce matériau ductile pour de très grandes déformations plastiques. Nous avons donc assimilée la déformation plastique à la déformation totale (la déformation élastique

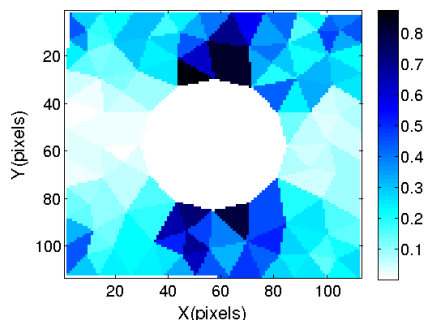


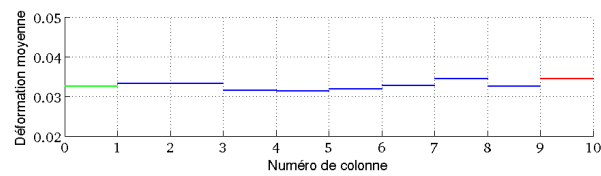
FIGURE 5.6 – Champ de déformation de von Mises de la cellule unitaire appartenant à la colonne de droite de la zone architecturée (troisième en partant du bas).

est négligeable devant la déformation plastique). Le champ de déformation des éléments, E_{GL} , est donc connu sur toute la zone architecturée à chaque pas.

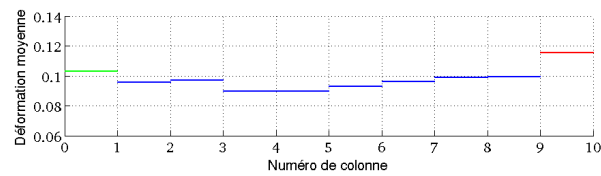
Champ de déformation plastique cumulée au pixel : Le champ de déformation aux éléments est projeté sur la grille de pixels. Pour cela, les pixels sont assimilés à des points placés au centre du pixel. Le champ de déformations E_p sur la grille de pixels est obtenu en imposant au pixel la valeur du champ de déformations à l'élément qui contient son centre. Le champ de déformation totale tracé sur les pixels est donné sur la Figure 5.6 pour une cellule appartenant à la colonne de droite.

Apparition de la zone de localisation : L'évolution des déformations moyennes de von Mises à l'intérieur des colonnes de la zone architecturée est suivi par la corrélation d'images à l'échelle microscopique. Quand la charge augmente, les déformations ne sont plus uniformes dans les ligaments et une localisation (verticale) apparaît le long d'une colonne de trous. A cause de la frontière entre la zone architecturée et le matériau homogène, la zone de localisation va se former le long de la colonne de gauche ou de droite. En effet, la structure carrée de la zone architecturée induit une concentration des contraintes dans les quatre coins et donc augmente les déformations dans les cellules unitaires des coins. La localisation des déformations apparaîtra dans la colonne contenant le plus de défauts (mésalignement ou bien un diamètre plus important des trous).

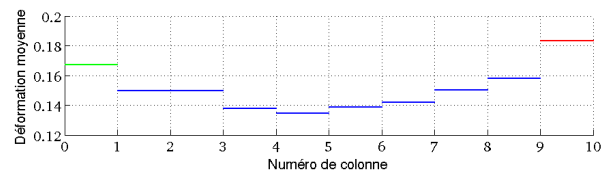
La figure 5.7 présente la déformation moyenne de von Mises dans chacune des dix colonnes aux trois instants présentés précédemment. Au premier instant (Figure 5.7(a)), la déformation moyenne varie peu entre les colonnes. Au second instant (Figure 5.7(b)), la colonne de droite a une déformation moyenne plus importante que les autres autres colonnes. Au troisième instant (Figure 5.7(c)), la localisation des déformations est bien établie. La colonne de droite a une déformation moyenne bien plus importante que la colonne de gauche alors que les colonnes centrales se déforment beaucoup moins.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5.7 – Visualisation de la déformation moyenne de von Mises dans les colonnes de la zone architecturée aux trois instants choisis.

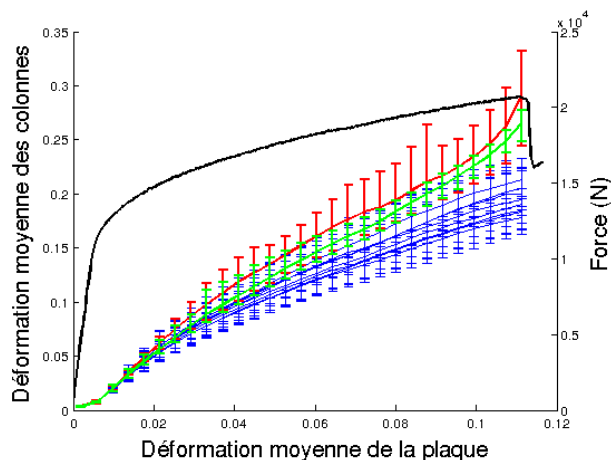


FIGURE 5.8 – Évolution de l’effort et de la déformation moyenne dans les colonnes (avec le maximum et minimum) à l’échelle microscopique en fonction de la déformation moyenne de la zone d’intérêt.

La zone de localisation apparaît dans la colonne de cellules unitaires qui contient la plus grande déformation moyenne de von Mises (colonne de droite). Un critère qui évolue suivant la déformation moyenne de la zone architecturée permet de déterminer la zone de localisation. Un tel critère ne peut s’utiliser que si nous savons que la zone de localisation représente par une colonne de cellules. L’évolution de la déformation moyenne des colonnes, ainsi que du maximum et du minimum des cellules de chaque colonne, sont tracées en fonction de la déformation moyenne de la zone architecturée sur la Figure 5.8.

Critère en déformation moyenne : La déformation moyenne dans les colonnes ne traduit pas de l’apparition de la localisation au niveau des cellules. Connaissant les cellules qui localisent et mènent à la fissuration de la zone architecturée, nous comparons les déformations moyennes de ces cellules et de toutes les autres cellules. Nous nous basons sur la valeur moyenne dans la cellule pour éviter les fluctuations de déformations locales dues au calcul de la corrélation d’images. Un critère expérimental d’initiation de la localisation à l’intérieur des cellules unitaires est déterminé.

Nous faisons ici l’hypothèse qu’une cellule unitaire contient une localisation lorsque la déformation moyenne de von Mises à l’intérieur de la cellule atteint un certain seuil. Dès que la déformation moyenne dans la cellule atteint 28%, nous considérons qu’une localisation est apparue dans la cellule :

$$E_{crit} = 0.28. \quad (5.1)$$

Seules les cellules unitaires de la colonne de droite franchissent ce critère durant

l'analyse de la corrélation d'images microscopique. Dans ce cas, le critère ne s'active que pour les derniers instants où les déformations sont très importantes.

5.3.2 Analyse de la position de la localisation

Une fois que le critère d'apparition de la localisation dans les cellules a été choisi, nous devons déterminer la position et l'orientation de la localisation dans les cellules unitaires considérées. Pour cela, nous utilisons les techniques d'imagerie et plus particulièrement la transformée de Radon [BRA 95]. La transformée de Radon, explicitée dans l'Annexe C, permet de calculer la projection d'un champ sur toutes les droites passant par l'intérieur de ce champ. La transformée de Radon pour un champ $f(x, y)$ est égale à :

$$T_f = \int_x \int_y [f(x, y) \cdot (x \cos \theta + y \sin \theta + b)] dx dy, \quad (5.2)$$

où θ et b sont l'inclinaison et l'ordonnée à l'origine de la droite de projection. En supposant que le support de la localisation est une droite, ce support sera perpendiculaire au maximum de la transformée de Radon du champ de déformations.

Transformée de Radon : une cellule unitaire considérée comme localisée est donc utilisée. La déformation de la troisième cellule en partant du bas de la colonne de droite a été tracée sur la Figure 5.6. Le maximum de la transformée de Radon est atteint pour un angle égal à 72 degrés et une ordonnée à l'origine égale à 30 pixels. La droite support de la localisation du champ des déformations sera donc proche de la direction horizontale et placée au dessus du trou. Le support passe bien par le maximum des déformations mais une localisation de direction verticale est plutôt attendue. Le résultat est erroné à cause de la déformation nulle à l'intérieur du trou.

Prise en compte du trou : afin de tenir compte du support réel de la localisation, la transformée de Radon est construite sur la seule zone contenant du matériau. La fonction indicatrice de la géométrie du matériau est construite, elle est présentée sur la Figure 5.9(a). Le sinogramme de la transformée de Radon est tracé sur la Figure 5.9(b). Les valeurs maximales du sinogramme correspondent aux points dont les droites projetées ne passent pas par le trou. Les projections qui passent par le trou ont une valeur de transformée deux fois plus faible que le maximum de la transformée de Radon, ce sont les droites telles que :

$$\begin{cases} \theta \simeq \{0, 90, 180\} \\ \rho < -30 \text{ ou } \rho > 30. \end{cases} \quad (5.3)$$

Le sinogramme de la transformée de Radon du champ des déformations est normé par la transformée de Radon de la géométrie du matériau. Ainsi chaque ligne projetée lors de la transformation sera divisée par sa longueur réelle afin de prendre en

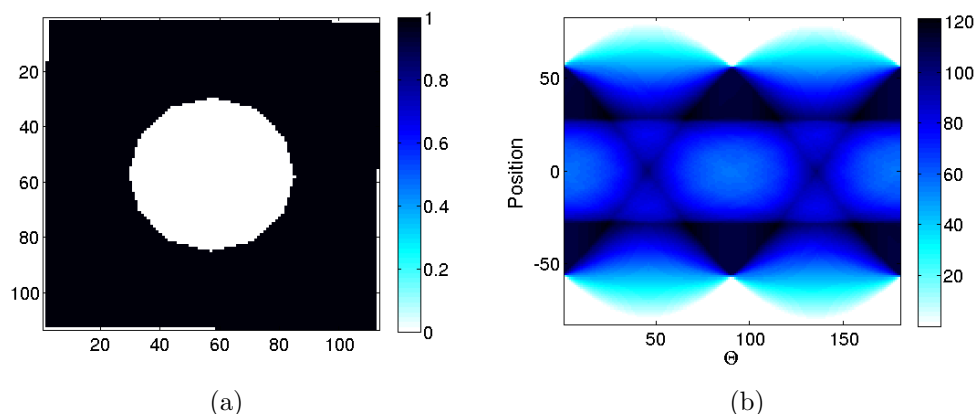


FIGURE 5.9 – Champ construit sur la géométrie du matériau (a) et sinogramme de la transformée de Radon (b) de ce champ.

compte les déformations nulles dans le trou. La Figure 5.10(a) représente le sinogramme résultant du rapport entre les deux transformées de Radon. Le maximum de ce sinogramme est donné pour un angle égal à 92 ($2 + 90$) degrés et une ordonnée à l'origine égale à 4. Le support de la localisation est tracé sur le champ de déformations de la cellule sur la Figure 5.10(b). Le support de la localisation trouvé est vertical et passe par le maximum des déformations de von Mises.

Juxtaposition des supports de la zone de localisation : dans toutes les cellules unitaires de la colonne de droite du matériau architecturée apparaît une localisation. Le support de la localisation pour chaque cellule est calculé à l'aide de la transformée de Radon. La Figure 5.11 présente la position du support de la localisation pour les dix cellules unitaires de la colonne de droite dans la configuration déformée.

Tous les supports de localisation calculés ont une inclinaison proche de l'axe vertical et se situent vers le centre du trou. Toutefois, nous pouvons noter que l'orientation des supports varie entre 86 et 97 degrés (par rapport à l'horizontale). L'ensemble des supports ne forme donc pas un support complet rectiligne le long de la colonne.

5.3.3 Calcul du saut de déplacement microscopique

Afin de calculer le saut de déplacement dû à la présence de la localisation dans la cellule unitaire, nous considérons la cellule comme un quadrangle dont la cinématique est enrichie à l'aide de fonctions de forme de discontinuités.

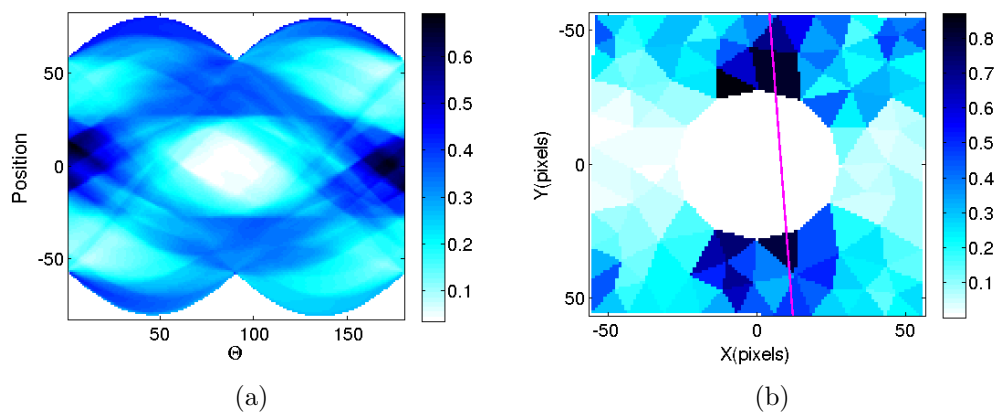


FIGURE 5.10 – (a) Rapport entre le Sinogramme de la transformée de Radon du champ de déformation de von Mises et du champ construit sur la géométrie du matériau ; (b) Champ de déformation de la cellule unitaire sur lequel est tracé le support de la localisation.

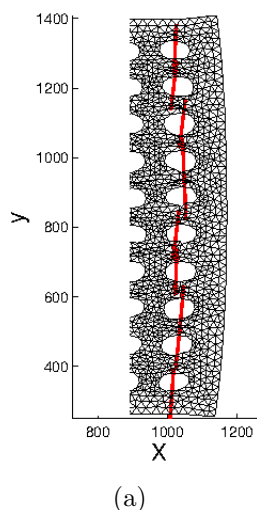


FIGURE 5.11 – Visualisation des lignes de localisation pour les cellules où la localisation s'est formée dans la configuration déformée.

5.3.3.1 Base X-FEM

La cellule unitaire est donc considérée comme un quadrangle dont les coins sont les nœuds. Le quadrangle considéré est recentré et les coordonnées sont ramenées dans l'intervalle $[-1, 1]$. Les quatre fonctions de forme éléments finis du quadrangle sont définies ci-dessous pour les coordonnées \mathbf{x} et \mathbf{y} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_1 = \frac{1}{4}(1 - \mathbf{x})(1 - \mathbf{y}) \\ \mathbf{N}_2 = \frac{1}{4}(1 + \mathbf{x})(1 - \mathbf{y}) \\ \mathbf{N}_3 = \frac{1}{4}(1 + \mathbf{x})(1 + \mathbf{y}) \\ \mathbf{N}_4 = \frac{1}{4}(1 - \mathbf{x})(1 + \mathbf{y}) \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Pour prendre en compte le saut de déplacement dû à la localisation de la déformation, nous introduisons la fonction de Heaviside H_{loc} définie de part et d'autre de la localisation, comme expliqué dans l'Annexe D :

$$\mathbf{H}_{loc} = \begin{cases} 0 & \text{si } y < x \tan \theta + b \\ 1 & \text{si } y > x \tan \theta + b \end{cases} \quad (5.5)$$

où $y = x \tan \theta + b$ est la ligne support de la localisation des déformations. La fonction de Heaviside H_{loc} est donc à valeurs entre 0 et 1 suivant la position du nœud par rapport à la position de la localisation. Les fonctions de forme de la discontinuité sont égales à :

$$\mathbf{H}_i = (\mathbf{H}_{loc} - \mathbf{H}_{loc}(x_i)) \cdot \mathbf{N}_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, 4\} \quad (5.6)$$

où x_i est la coordonnée du coin du quadrangle où la fonction de forme N_i est maximale. Nous utilisons les fonctions enrichies définies par Zi [ZI 03]. Ces fonctions sont dites décalées, *shifted*, les fonctions d'enrichissement H_i sont à valeur dans l'intervalle $[-1, 1]$.

5.3.4 Calcul du saut de déplacement normal à la ligne de localisation

Les nœuds sélectionnés dans chaque cellule pour l'identification de la partie continue du déplacement sont les nœuds les plus éloignés de la position de la localisation. La distance à la localisation de chaque nœud est donc calculée. Les 20 nœuds n_c les plus éloignés de la localisation (10 de chaque côté) sont récupérés. Les nœuds sont représentés avec des symboles rouges sur la Figure 5.12, ils ne correspondent pas forcément aux nœuds du bord de la cellule unitaire lorsque l'inclinaison de la localisation est importante. Le reste des nœuds n_d de la cellule, définis par l'équation 5.7, est utilisé pour calculer la partie discontinue du déplacement.

$$n_d = \{1, \dots, n\} \setminus \{n_c\} \quad (5.7)$$

Les vecteurs \mathbf{a}_c et \mathbf{a}_d regroupant les valeurs du déplacement normal à la localisation sont définies sur les nœuds sélectionnés pour la partie continue et discontinue du déplacement à partir des deux systèmes suivants :

$$\mathbf{L}_c \mathbf{a}_c = \mathbf{U}^n(n_c) \quad (5.8)$$

$$\mathbf{L}_d \mathbf{a}_d = \mathbf{U}^n(n_d) - \mathbf{L}_d \mathbf{a}_c \quad (5.9)$$

où le déplacement \mathbf{U}^n est le déplacement normal à la localisation et les matrices \mathbf{L}_c et \mathbf{L}_d regroupent respectivement les fonctions de forme classiques aux nœuds n_c et les fonctions de forme de la discontinuité aux nœuds n_d . Les matrices sont définies par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_c &= [\mathbf{N}_1(n_c) \ \mathbf{N}_2(n_c) \ \mathbf{N}_3(n_c) \ \mathbf{N}_4(n_c)] \\ \mathbf{L}_d &= [\mathbf{H}_1(n_d) \ \mathbf{H}_2(n_d) \ \mathbf{H}_3(n_d) \ \mathbf{H}_4(n_d)]. \end{cases} \quad (5.10)$$

Les vecteurs \mathbf{a}_c et \mathbf{a}_d sont calculés aux moindres carrés sur les nœuds sélectionnés. Le déplacement \mathbf{U}^c est reconstruit sur les nœuds utilisés pour la partie continue et discontinue du déplacement de la cellule unitaire par les équations suivantes :

$$\mathbf{U}^c(n_c) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_i \mathbf{a}_{c_i} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{U}^c(n_d) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{H}_i \mathbf{a}_{d_i} \quad (5.12)$$

Le déplacement mesuré par la corrélation d'images microscopique normal à la localisation (en bleu) et le déplacement calculé avec la discontinuité (en rouge la partie continue et en magenta la partie discontinue) sont tracées sur la Figure 5.12. Le saut de déplacement normal à la localisation $[U_m]$ est la différence entre les déplacements des deux nœuds les plus proches de la localisation. Le saut de déplacement est donc égal à :

$$[U_m] = \min(\mathbf{U}^c(H_{loc} = 1)) - \max(\mathbf{U}^c(H_{loc} = 0)). \quad (5.13)$$

5.3.5 Bilan

Une éprouvette avec une zone architecturée de dimension plus faible a été réalisée afin d'analyser dans un premier temps les effets de la localisation des déformations à l'échelle du trou. Les cellules unitaires de cette éprouvette où apparaît la localisation font partie de la zone de transition entre le matériau homogène et la zone architecturée. Deux manières de calculer le saut de déplacement normal à la localisation ont été détaillées.

La première méthode s'appuie sur l'échelle macroscopique où la connaissance de la position de la fissure permet d'effectuer une corrélation d'images étendue. La discontinuité est insérée au début du calcul de corrélation et le saut de déplacement est

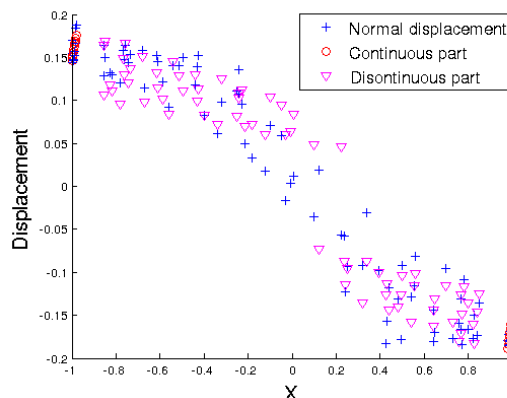


FIGURE 5.12 – Calcul du champ de déplacement *X-FEM* avec l'introduction d'une discontinuité. Avec les symboles $+$ le déplacement normal mesuré par corrélation d'images, en \circ et ∇ la partie continue et discontinue du déplacement identifié.

calculé pour toutes les images étudiées. La seconde méthode est d'utiliser le résultat de la corrélation d'images classique à l'échelle microscopique. La transformée de Radon permet d'obtenir la position du support de la localisation après avoir déterminé un critère d'apparition de la localisation. Ensuite, la cinématique macroscopique de la cellule unitaire est enrichie avec des fonctions de forme discontinues afin de calculer le saut de déplacement normal à la localisation.

Une comparaison des sauts de déplacement calculés à partir des deux échelles est réalisée. A l'instar de l'échelle macroscopique où la discontinuité est connue et insérée dès le début du calcul, nous choisissons d'étudier uniquement les cellules unitaires qui localisent à partir de l'échelle microscopique. Il est choisi de calculer le saut à partir d'une déformation moyenne égale à 5% de la zone architecturée. Le saut de déplacement maximal par les deux approches est considéré et tracé sur la Figure 5.13 en fonction de la déformation moyenne de la zone architecturée.

Un bon accord sur le saut de déplacement maximal est obtenu. Il est du même ordre de grandeur entre les deux méthodes. Un saut de déplacement de quelques pixels (équivalent à 0.2 mm) est ainsi trouvé par ces méthodes. La comparaison du saut a été faite avant le déchirement de la zone architecturée puisque la corrélation d'images microscopique classique présente trop d'erreur dès que la localisation devient visible.

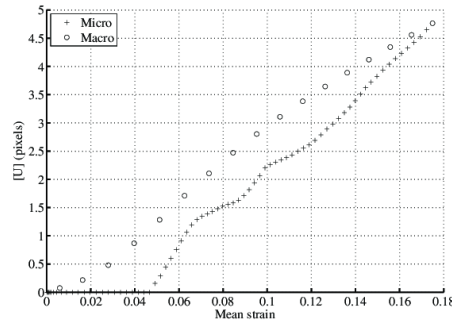


FIGURE 5.13 – Évolution des sauts de déplacements microscopique et macroscopique en fonction de la déformation moyenne de la zone architecturée.

5.4 Application sur l'éprouvette à 0 degrés

La méthode pour calculer le saut de déplacement induit par la zone de localisation à partir de l'échelle microscopique est maintenant appliquée à l'éprouvette non inclinée présentée dans la Section 2.3.1. La géométrie de l'éprouvette avec la structure architecturée centrale non inclinée est représentée sur la Figure 2.1(a). La zone de localisation apparaît dans la ligne horizontale centrale de la zone architecturée à cause de sa géométrie. En effet, un trou de chaque côté de cette ligne a été ajouté afin d'obliger la fissure d'apparaître ici. La zone de localisation n'apparaît donc pas dans la zone de transition entre les deux matériaux mais à l'intérieur de la zone architecturée.

Une étude du critère développé précédemment est présentée dans la Section 5.4.1 pour conclure sur sa pertinence. Une fois les cellules unitaires localisées choisies, le calcul de la position du support de la localisation est effectué sur toutes ces cellules dans la Section 5.4.2. Une analyse statistique sur les cellules unitaires localisées de l'éprouvette non inclinée donne une dispersion importante de la position de la ligne de localisation. Une nouvelle méthode d'identification de la position de la localisation est donnée. Enfin le saut de déplacement normal à la localisation est calculé avec les méthodes *X-FEM* dans la Section 5.4.3.

5.4.1 Critère de localisation

L'évolution de la déformation moyenne des lignes de la zone architecturée en fonction de la déformation moyenne de la plaque est tracée sur la Figure 5.14. L'ordonnée de la courbe correspond au numéro de la ligne, où la première ligne est la ligne inférieure de la zone architecturée et la dernière la ligne supérieure. Le dernier état de déformation est l'instant qui précède la fissuration complète de la zone architecturée.

Les cellules unitaires de la ligne horizontale centrale concentrent bien les

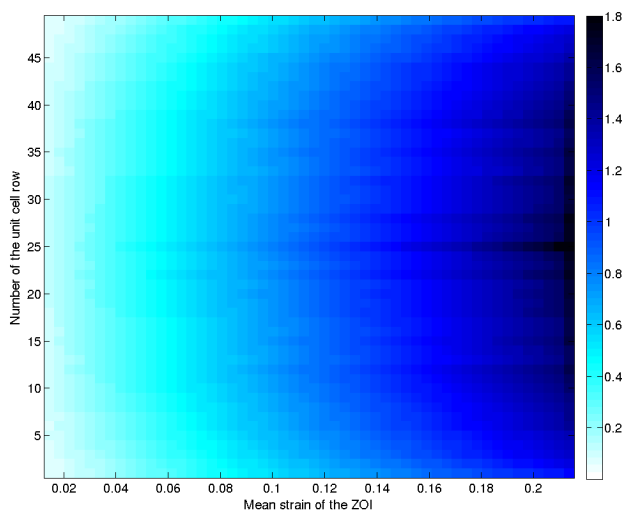


FIGURE 5.14 – Carte de l'évolution de la déformation moyenne dans les lignes de la zone architecturée en fonction de la déformation moyenne de la ZOI.

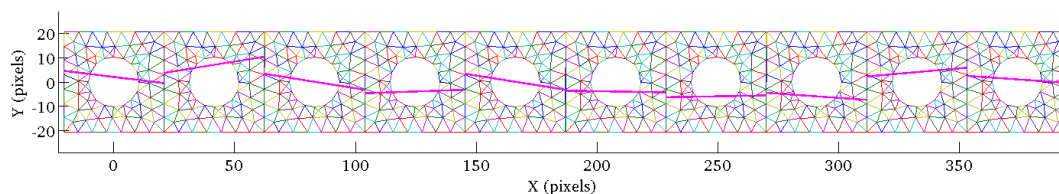


FIGURE 5.15 – Visualisation de la zone de localisation pour les dix cellules unitaires situées le plus à gauche de la ligne horizontale centrale de trous.

déformations les plus élevées à chaque image. Un critère dépendant de la déformation de la zone architecturée peut ainsi être construit pour déterminer quelles sont les cellules localisées de la zone architecturée.

5.4.2 Analyse de la position de la localisation

La localisation dans les cellules unitaires apparaît sur la ligne horizontale centrale de la zone architecturée. Le support de la localisation de chaque cellule est calculé avec la transformée de Radon développée dans la Section 5.3.2. La fonction indicatrice de la cellule unitaire est utilisée pour normer le calcul de la transformée de Radon du champ de déformation de von Mises. Pour les cellules concernées par la localisation, le support de la localisation trouvée est proche de la direction horizontale et du centre du trou. La position du support de la localisation pour les dix cellules unitaires les plus à gauche de la ligne centrale est présentée sur la Figure 5.11.

	Moyenne	Écart-type
Angle (degrés)	-1.9	6.9
Ordonnée à l'origine (pixel)	-1.06	4.8

TABLE 5.2 – Moyenne et écart-type des paramètres de la position de la localisation pour les 51 cellules unitaires de la ligne centrale.

Toutefois, l'ensemble des supports ne forme pas un support parfaitement rectiligne le long de la ligne centrale. Le mésalignement des supports des 51 cellules unitaires de la ligne centrale est détaillé dans la Table 5.2 avec la moyenne et l'écart-type de l'angle d'inclinaison et de l'ordonnée à l'origine du support. La moyenne de l'angle d'inclinaison est égale à -1.9° ce qui montre que les localisations sont très proches de l'horizontal mais l'écart-type est égal à 6.9° . L'écart-type montre qu'il existe de fortes dispersions dans la valeur de l'angle d'inclinaison. Il en est de même avec l'ordonnée à l'origine du support (moyenne égale à -1 pixel et écart-type égal à 5 pixels).

Calcul d'une nouvelle position du support : une mauvaise position du support de la localisation engendre des résultats approximatifs pour le saut de déplacement calculé ensuite. L'angle d'inclinaison varie assez fortement (dans l'intervalle $[-10, 10]$ degrés) alors que la géométrie choisie pour la zone architecturée implique un support proche de l'axe horizontal. L'objectif est d'obtenir une valeur plus proche de cet angle avec une analyse des champs de déformation à l'échelle microscopique. Pour cela, connaissant les cellules unitaires qui ont localisé, l'idée est d'associer à une cellule localisée les deux cellules localisées adjacentes. Le résultat de la quatrième cellule en partant de la gauche est donné sur la Figure 5.16. Le support de la localisation a une inclinaison égale à 1 degré. Il en est de même pour toutes les cellules de ligne horizontale.

Cette méthode n'est valable que si le support de la localisation a la même orientation entre la cellule considéré et ses deux cellules adjacentes. Pour les éprouvettes avec la zone architecturée à 30 et 45 degrés, la fissuration bifurque dans le réseau de trous. Elle est majoritairement inclinée dans les lignes du réseau comme le montre la Figure 5.17 mais aux endroits où la fissure bifurque, le calcul de la position de la localisation ne donne pas de résultat concluant.

5.4.3 Saut de déplacement microscopique

La zone de localisation apparaît dans la ligne centrale horizontale. Le champ de déformation de von Mises de la sixième cellule unitaire en partant de la gauche est tracée sur la Figure 5.18(a). Cette cellule n'appartient pas à la zone de transition entre les deux matériaux et a une cinématique de déformation périodique. La localisation trouvée par la transformée de Radon est inclinée de 2 degrés par rapport à

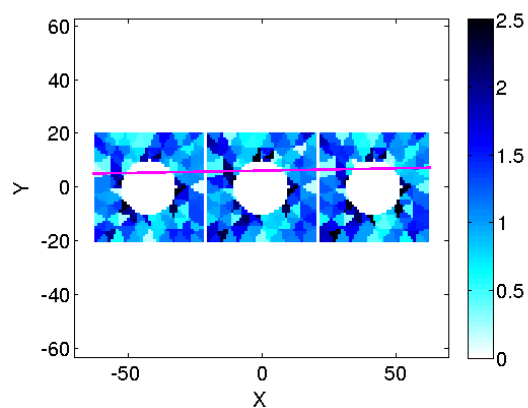


FIGURE 5.16 – Visualisation du champ de déformations de von Mises de trois cellules unitaires localisées adjacentes et du support de la localisation calculé.

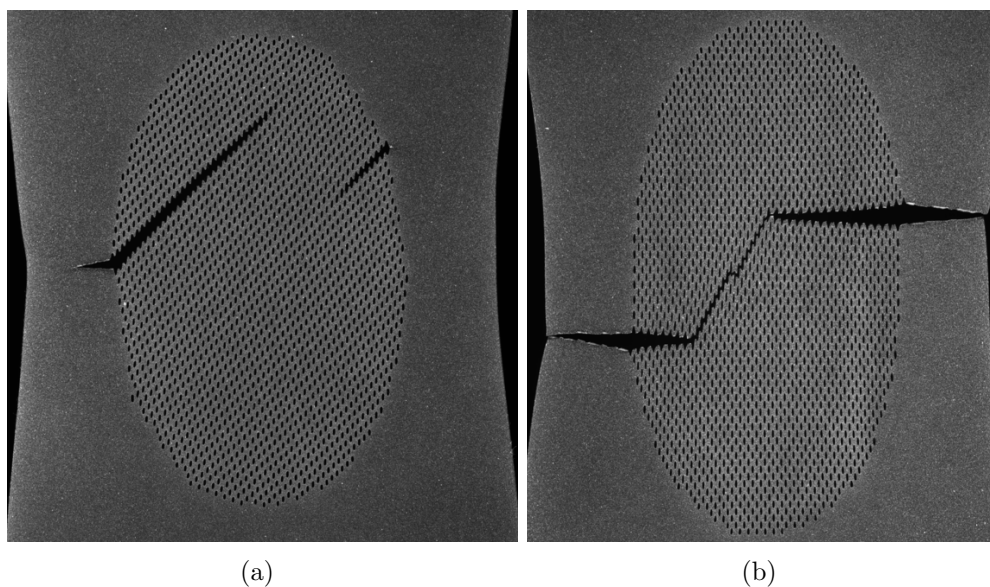


FIGURE 5.17 – Visualisation des éprouvettes après déchirement de la zone architecturée : (a) 30 degrés et (b) 45 degrés d'inclinaison.

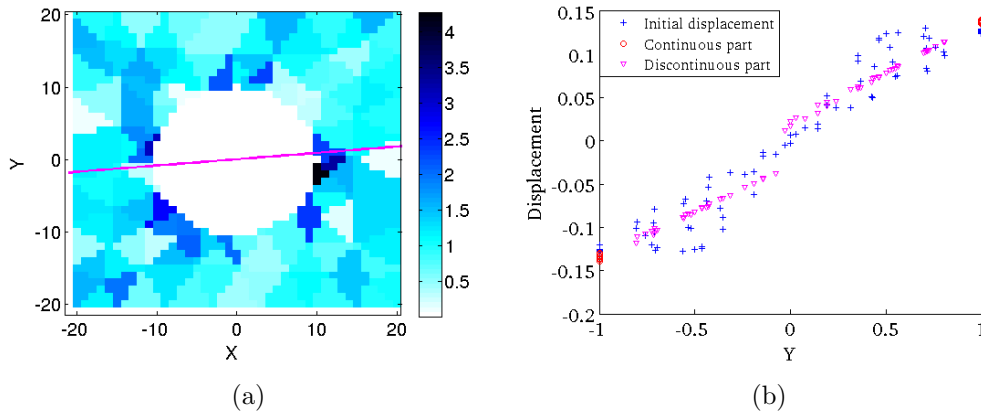


FIGURE 5.18 – (a) Champ de déformation de von Mises de la sixième cellule unitaire de la ligne centrale en partant de la gauche. Le support de la localisation est tracé en magenta ; (b) Calcul du champ de déplacement X -FEM avec l'introduction d'une discontinuité deux images avant la fissuration de la zone architecturée. Avec les symboles $+$ le déplacement normal, en \circ et ∇ la partie continue et discontinue du déplacement calculé.

l'horizontale et centrée au niveau du trou.

La méthode de calcul du saut de déplacement normal à la localisation est identique à la méthode présentée dans la Section 5.3.3.1. La cinématique de la cellule unitaire est enrichie avec la discontinuité en utilisant la partition de l'unité. Le déplacement normal à la localisation mesuré par la corrélation d'images microscopique (en bleu) et le déplacement calculé avec la discontinuité (en rouge la partie continue et en magenta la partie discontinue) sont tracées sur la Figure 5.18(b). Dans le domaine non-linéaire la déformation de la cellule est uniaxiale (voire Figure 3.1(a)). Les bords de la cellule restent droits et l'identification de la partie continue du déplacement enrichi est assez précise.

La cellule unitaire la plus excentrée à droite de la ligne centrale est maintenant considérée. Elle fait partie de la zone de transition entre les deux matériaux et a une cinématique de déformation non périodique (Figure 3.9(a)). Les bords de la cellule normaux à la localisation se déforment de manière parabolique. Le déplacement normal à la localisation mesuré par la corrélation d'images microscopique (en bleu) et le déplacement calculé avec la discontinuité (en rouge la partie continue et en magenta la partie discontinue) sont tracées sur la Figure 5.19. La projection sur l'axe vertical (Figure 5.19(b)) et sur l'axe horizontal (Figure 5.19(a)) sont détaillés. Comme attendu, cette cellule a une localisation beaucoup plus importante qu'à l'intérieur du réseau de trous (saut de déplacement à peu près égal à 3,5 pixels par rapport à 1.7 pixels pour la cellule précédente). Par contre l'identification de la partie continue du déplacement n'est pas précise (Figure 5.19(a)). Pour la capturer

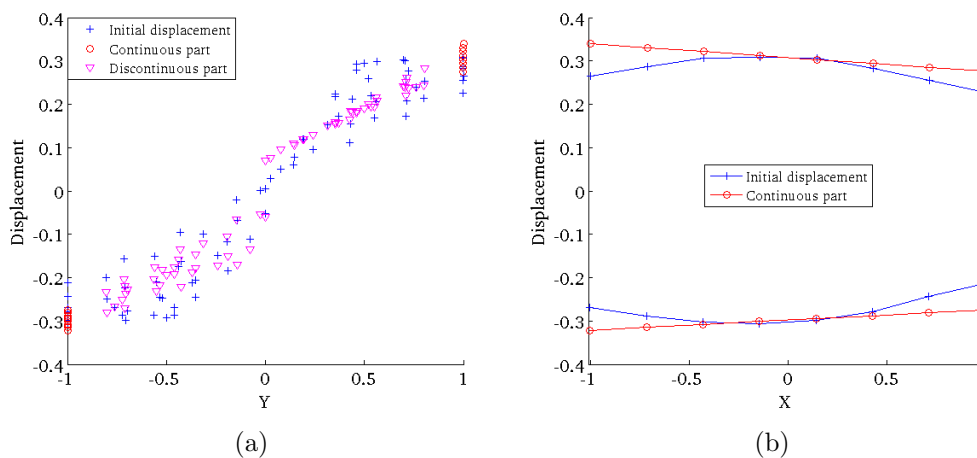


FIGURE 5.19 – Calcul du champ de déplacement *X-FEM* avec l'introduction d'une discontinuité deux images avant la fissuration de la zone architecturée. Projection sur l'axe vertical (a) et projection sur l'axe horizontal (b) du déplacement normal (symboles +), de la partie continue (symboles o) et discontinue du déplacement (symboles v) calculé.



FIGURE 5.20 – Champ de déplacement longitudinal de la corrélation d'images étendue.

il faudrait utiliser une cinématique d'ordre supérieur adaptée à sa non-périodicité.

5.4.4 Corrélation d'images étendue

L'échelle macroscopique est traitée avec une corrélation d'images étendue. La fissure est insérée sur la ligne centrale horizontale où la zone architecturée se fissure. Seul le résultat sur les cinq lignes de trous autour de la fissure est donné puisque nous nous intéressons au saut de déplacement obtenu au niveau de la fissure. Le déplacement normal à la fissure est tracé sur la Figure 5.20 où un élément quadrangle représente une cellule unitaire (5 éléments dans la direction verticale donc).

Juste avant la fissuration complète de la zone architecturée, le saut de déplacement mesuré est de l'ordre d'une dizaine de pixels, soit 0.2 mm alors que la dimension d'un trou est égale à 0.5 mm . La comparaison du saut de déplacement mesuré à partir des deux échelles donne des résultats du même ordre de grandeur.

Toutefois la valeur maximale du saut de déplacement calculée à partir de l'échelle microscopique n'est pas assez précise puisque les cellules concentrant le maximum des déformations sont les deux cellules les plus excentrées de la ligne centrale.

5.5 Synthèse

Dans un premier temps une éprouvette avec une zone architecturée de dimension plus faible a été réalisée afin d'analyser les effets de la localisation des déformations aux échelles microscopique et macroscopique. Les cellules unitaires de cette éprouvette qui localisent font partie de la zone de transition entre le matériau homogène et la zone architecturée. Deux méthodes expérimentales pour calculer le saut de déplacement normal à la localisation ont été détaillées.

La première méthode est directe et s'appuie sur l'échelle macroscopique. La connaissance de la position de la fissure permet d'effectuer une corrélation d'images étendue. La discontinuité est insérée dans les éléments représentant une cellule unitaire concernés et le saut de déplacement est mesuré. La seconde méthode utilise les résultats de la corrélation d'images de l'échelle microscopique. La transformée de Radon permet d'obtenir la position du support de la localisation en prenant en compte la géométrie de la cellule. Ensuite, la cinématique de la cellule unitaire est enrichie avec des fonctions de forme discontinues, de type *X-FEM* afin de calculer le saut de déplacement normal à la localisation.

Cette analyse a été appliquée à l'éprouvette avec la zone architecturée non inclinée. La localisation apparaît dans la ligne horizontale centrale du réseau de trous. Dans la Section 3.2.3 il a été montré que ces cellules unitaires ont une réponse périodique dans le domaine non-linéaire sauf pour les deux cellules les plus excentrées de cette ligne. Une analyse statistique a montrée qu'il faut considérer les cellules adjacentes pour calculer la position de la localisation avec la transformée de Radon. Le saut de déplacement à partir de l'échelle microscopique est calculé pour une cellule avec une cinématique périodique et une cellule du bord. Dans la cellule du bord, la partie discontinue du déplacement *X-FEM* ne s'obtient pas à cause des déformations cubiques des bords (voire Section 3.2.3 et Figure 3.9). L'estimation du saut de déplacement dans ces deux cellules n'est pas assez précise pour comparer les sauts de déplacements mesurés par les deux échelles.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Ce travail de thèse s'inscrit dans une démarche de validation des changements d'échelle en mécanique non-linéaire. Jusqu'à maintenant les méthodes multi-échelles sont validées par comparaison avec des simulations plein champ, où les hétérogénéités doivent toutes être représentées. Les moyens expérimentaux de validation sont la réponse globale de la structure, la récupération d'informations locales (seulement en quelques points) ou l'étude *post-mortem* de l'échantillon pour l'analyse de la rupture des hétérogénéités. Dans ce travail, un matériau multi-échelle modèle a été créé et testé avec une caméra à très haute résolution afin de mesurer les champs de déplacements sur toute la structure aux échelles microscopique et macroscopique. L'orientation de la structure architecturée a permis d'obtenir des sollicitations couplées (traction, cisaillement) dans les cellules unitaires à l'aide d'une machine de traction uniaxiale.

Le pré-dimensionnement des structures architecturées et les résultats expérimentaux sont détaillés dans le deuxième chapitre du manuscrit. Les résultats de la corrélation d'images aux échelles microscopique et macroscopique sont vérifiés en regard de la qualité du résidu calculé. Le manuscrit traite ensuite des différents aspects de changement d'échelles du matériau qui peuvent être utilisés dans les méthodes multi-échelles. Ces aspects peuvent se décomposer suivant la déformation de la structure architecturée : le domaine linéaire, le domaine non-linéaire, la localisation des déformations menant à la fissuration.

Le passage de l'échelle macroscopique vers l'échelle microscopique se fait généralement en appliquant des conditions aux limites en déplacement. Ces conditions aux limites dépendent du choix du milieu macroscopique (classique ou d'ordre supérieur) et de la périodicité ou non de la microstructure. Dans ce manuscrit, il est montré que pour les cellules unitaires ayant une cinématique périodique, des conditions aux limites périodiques du premier ordre (usuelles) sont aussi précises que des conditions aux limites périodiques du second ordre. Mais dans le cas des cellules de la zone de transition, ayant une cinématique non périodique, les conditions aux limites périodiques usuelles donnent des résultats erronés et le milieu macroscopique doit être enrichi. Des conditions aux limites cinématiques d'ordre deux ne peuvent pas non plus représenter les déformations de cisaillement. Il est donc

nécessaire d'appliquer des conditions aux limites périodiques d'ordre deux. L'écart entre le contour expérimental et le contour prévu par le calcul avec les conditions aux limites périodiques d'ordre deux est entre 1.3 et 2 fois plus petit que celui obtenu avec les conditions aux limites périodiques du premier ordre. Les conditions aux limites cinématiques d'ordre trois sont encore plus précises.

Le remplacement des cellules unitaires avec une cinématique périodique par un milieu homogène équivalent (MHE) est aussi abordé. La géométrie de la cellule unitaire introduit des symétries dans le comportement du matériau à l'échelle macroscopique. Dans notre cas celui-ci devient cubique (le module de cisaillement n'est plus lié au module de Young et au coefficient de Poisson). Les caractéristiques élastiques du MHE sont calculés par deux méthodes : l'homogénéisation usuelle numérique et l'homogénéisation à partir des résultats expérimentaux. L'identification du comportement plastique nécessite des simulations d'essais biaxiaux supplémentaires. Un critère de Hill est identifié pour les cas de chargement en traction et cisaillement. Un critère de Tsai-Hill est nécessaire pour les essais en compression afin de prendre en compte le premier invariant des contraintes.

Le dernier chapitre s'est intéressé à la fissuration de la zone architecturée et à l'initiation de la localisation des déformations dans les cellules unitaires. Le support de la localisation est calculé avec la transformée de Radon du champ des déformations mesuré par DIC. La cinématique de la cellule est enfin enrichie avec une discontinuité et le saut de déplacement normal à la localisation est identifié. Une comparaison du maximum du saut de déplacement le long de la fissure identifié à partir des déformations microscopiques à celui calculé avec la corrélation d'images étendue à l'échelle macroscopique est menée afin de valider la stratégie d'identification. Cette stratégie a ensuite été appliquée à l'éprouvette non inclinée où la position de la fissure est connue. Une analyse statistique sur les cellules localisées a montré que le calcul de la position de la ligne de localisation donne d'importantes dispersions : une nouvelle méthode a donc été présentée.

Perspectives

Les perspectives de ce travail sont nombreuses, autant du point de vue expérimental que de la simulation numérique. Une liste non exhaustive de ces perspectives est donné ci-après :

- L'orientation de la structure architecturée a permis d'obtenir des sollicitations couplées en traction et cisaillement dans les cellules à partir d'une machine de traction uniaxiale. Afin d'obtenir plus d'états de chargement au niveau de la microstructure, une machine de traction biaxiale pourrait être utilisée. La géométrie de l'éprouvette doit pour cela être repensée, la structure macroscopique doit avoir une forme de croix et la structure architecturée peut être placée au centre.
- La structure architecturée a mis en évidence un changement de phase de

- l'acier inoxydable dans les cellules localisées alors que l'essai se fait à température ambiante. Certaines études montrent qu'une déformation importante à température ambiante peut provoquer un changement de phase dans des aciers similaires au notre [OLS 75, SOL 10]. La magnétisation de la structure architecturée montre que les cellules unitaires localisées sont passées d'une phase austénitique à une phase martensitique (déformation très importante due à la présence des trous). Une expérience a par ailleurs été réalisée avec un pyromètre placée sur une cellule qui localise. Un changement de température apparaît nettement avant la fissuration synonyme d'un changement de phase.
- Notre géométrie de cellule (un carré percé en son centre) induit un matériau homogène équivalent avec un comportement cubique. Il serait intéressant de construire une cellule unitaire donnant un comportement de MHE lui aussi isotrope. Pour cela, nous pourrions nous appuyer sur les travaux d'Auf-ray [AUF 08] pour créer une telle structure.
 - Afin de réduire le temps de calcul des méthodes multi-échelles d'ordre supérieur de type FE^2 , il serait judicieux de remplacer les cellules unitaires ayant une cinématique périodique par un matériau homogène équivalent. En effet, le chapitre 4 montre que l'homogénéisation de ces cellules est possible. Une méthode de couplage entre l'intérieur de la structure architecturée, ayant une cinématique périodique, et la zone de transition doit être mise en place. On peut penser à une méthode Arlequin par exemple.
 - La cinématique classique de la cellule enrichie avec un saut de déplacement n'est pas adaptée aux cellules de la zone de transition. Le bord de ces cellules a une déformation parabolique ce qui nuit à l'identification de la partie continue du déplacement et donc du saut de déplacement. Une cinématique plus complexe doit être choisie pour identifier le saut de déplacement normal à la fissure. Cette cinématique plus complète est nécessaire si nous voulons analyser la localisation dans les éprouvettes avec la structure architecturée inclinée. En effet, quelque soit la cinématique des cellules (périodique ou non périodique), les cellules sont soumises à du cisaillement et les bords ont une déformation non linéaire. Cette observation questionne les méthodes actuelles de changement d'échelles des matériaux fissurants.

Annexe A

Calcul des conditions aux limites périodiques généralisées

Implémentation d'un milieu du second ordre

Dans notre travail, nous étudierons plus particulièrement l'implémentation d'un milieu d'un second ordre à l'échelle macroscopique. La méthode est représentée sur la figure A.1. Le déplacement microscopique \mathbf{u}^m est défini dans la cellule unitaire comme la somme d'un champ de déplacement venant de l'échelle macroscopique ($\bar{\mathbf{u}}$) et d'un champ de déplacement microscopique inconnu (\mathbf{w}) :

$$\mathbf{u}^m = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{w} \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{A.1})$$

\mathbf{w} est un champ de déplacement inconnu vérifiant la condition de périodicité sur le bord du VER étudié. Le champ ($\bar{\mathbf{u}}$) est défini par le gradient du tenseur de la transformation macroscopique (\mathbf{F}^M) et son gradient ($\mathbf{G}^M = \nabla \mathbf{F}^M$) sur le contour du VER :

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F}^M \cdot \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{X} \mathbf{G}^M \mathbf{X} \quad \text{sur } \Gamma, \quad (\text{A.2})$$

où \mathbf{X} est la coordonnée d'un point quelconque du VER.

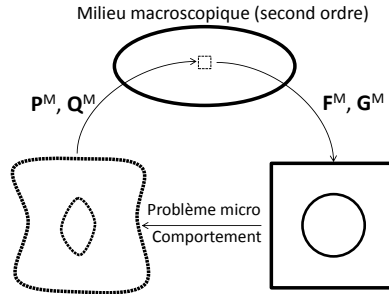


FIGURE A.1 – Principe de la méthode FE^2 avec un milieu macroscopique du second ordre.

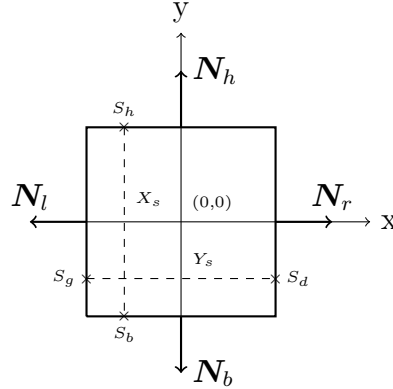


FIGURE A.2 – Schéma représentant les paramètres utilisés pour les conditions aux limites périodiques de la cellule unitaire non déformée.

Calcul des conditions limites périodiques généralisées

La condition de périodicité entre deux points homologues des lignes gauche et droite et des lignes haut et bas s'écrit :

$$\mathbf{w}_g(Y_s) = \mathbf{w}_d(Y_s) \text{ et } \mathbf{w}_h(X_s) = \mathbf{w}_b(X_s), \quad (\text{A.3})$$

où X_s et Y_s sont respectivement l'abscisse de deux points homologues des lignes haut et bas et l'ordonnée de deux points homologues des lignes gauche et droite. Les points sont décrits sur la Figure A.2. Pour la suite du calcul, la coordonnée concernée par les points homologues est omise. Les conditions aux limites périodiques se calculent par soustraction des déplacements microscopiques de deux points homologues :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m = \mathbf{F}^M \cdot (\mathbf{X}_d - \mathbf{X}_g) + \frac{1}{2} \mathbf{X}_d \mathbf{G}^M \mathbf{X}_d - \frac{1}{2} \mathbf{X}_g \mathbf{G}^M \mathbf{X}_g \\ \mathbf{u}_h^m - \mathbf{u}_b^m = \mathbf{F}^M \cdot (\mathbf{X}_h - \mathbf{X}_b) + \frac{1}{2} \mathbf{X}_h \mathbf{G}^M \mathbf{X}_h - \frac{1}{2} \mathbf{X}_b \mathbf{G}^M \mathbf{X}_b \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La cellule unitaire étant un carré de côté L , la position initiale entre deux points homologues s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_d - \mathbf{X}_g = L \mathbf{N}_d \text{ et } \mathbf{X}_d + \mathbf{X}_g = 2Y_s \mathbf{N}_h \\ \mathbf{X}_h - \mathbf{X}_b = L \mathbf{N}_h \text{ et } \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_b = 2X_s \mathbf{N}_d, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

En simplifiant le terme de droite dans l'équation (A.4) et en utilisant la propriété de symétrie mineure de \mathbf{G}^M ($G_{ijk}^M = G_{kji}^M$), les conditions de périodicité s'explicitent

pour le couple des bords droit et gauche :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m &= L\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_d + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_g + L\mathbf{N}_d)\mathbf{G}^M(\mathbf{X}_g + L\mathbf{N}_d) - \frac{1}{2}\mathbf{X}_g\mathbf{G}^M\mathbf{X}_g \\
\mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m &= L\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_d + \frac{L}{2}\mathbf{N}_d\mathbf{G}^M\mathbf{N}_d + \frac{L}{2}(\mathbf{N}_d\mathbf{G}^M\mathbf{X}_g + \mathbf{X}_g\mathbf{G}^M\mathbf{N}_d) \\
\mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m &= L\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_d + \frac{L}{2}\mathbf{N}_d\mathbf{G}^M\mathbf{N}_d + \frac{L}{2}(\mathbf{N}_d\mathbf{G}^M(Y_s\mathbf{N}_h - \frac{L}{2}\mathbf{N}_d) + (Y_s\mathbf{N}_h - \frac{L}{2}\mathbf{N}_d)\mathbf{G}^M\mathbf{N}_d) \\
\mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m &= L\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_d + \frac{L}{2}Y_s(\mathbf{N}_h\mathbf{G}^M\mathbf{N}_d + \mathbf{N}_d\mathbf{G}^M\mathbf{N}_h) \\
\mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m &= L\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_d + LY_s\mathbf{N}_h\mathbf{G}^M\mathbf{N}_d
\end{aligned} \tag{A.6}$$

La méthode est analogue pour le couple des bords haut et bas, les conditions de périodicité s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m = L\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_d + LY_s\mathbf{N}_h\mathbf{G}^M\mathbf{N}_d \\ \mathbf{u}_h^m - \mathbf{u}_b^m = L\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_h + LX_s\mathbf{N}_h\mathbf{G}^M\mathbf{N}_d \end{cases} \tag{A.7}$$

Le calcul de ces conditions aux limites a été mené dans le cadre d'une cellule rectangulaire par Kouznetsova dans [KOU 02]. Le résultat obtenu alors s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_d^m - \mathbf{u}_g^m = W\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_d + W\mathbf{N}_d\mathbf{G}^M\mathbf{X}_l + \frac{W^2}{2}\mathbf{N}_d\mathbf{G}^M\mathbf{N}_d \\ \mathbf{u}_h^m - \mathbf{u}_b^m = H\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{N}_t + H\mathbf{N}_t\mathbf{G}^M\mathbf{X}_b + \frac{H^2}{2}\mathbf{N}_t\mathbf{G}^M\mathbf{N}_t \end{cases} \tag{A.8}$$

En posant $L = W = H$ et en développant le second membre des équations, nous retrouvons le résultat donné par l'équation (A.8). Il peut être noté que si le second gradient des déplacements \mathbf{G}^M est un tenseur nul alors le second terme des équations de périodicité (A.7) ne dépend plus que du gradient de la transformation et nous obtenons les conditions aux limites classiques du premier ordre. Ainsi lorsque le second gradient est non nul, chaque nœud est lié avec son point homologue mais n'est plus liée au côté auquel il appartient.

En imposant uniquement cette condition cinématique de déplacement sur le bord, la cellule unitaire ne se déforme plus en moyenne. Pour cela, nous devons nous assurer que les moyennes microscopiques des deux gradients de transformation ($\langle \mathbf{F}^m \rangle$ et $\langle \mathbf{G}^m \rangle$) sont égales aux deux gradients macroscopiques (\mathbf{F}^M et \mathbf{G}^M). Le premier gradient de la transformation microscopique s'obtient à partir du champ de déplacement microscopique dans la cellule (équation A.1) :

$$\mathbf{F}^m = \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \mathbf{w}. \tag{A.9}$$

La relation précédente (A.9) est intégrée sur la surface de la cellule unitaire et est divisée par la surface S pour obtenir la moyenne du gradient de transformation

microscopique :

$$\langle \mathbf{F}^m \rangle = \frac{1}{S} \int_S (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \mathbf{w}) dS. \quad (\text{A.10})$$

Le théorème de la divergence est utilisée sur l'équation précédente (A.10) pour obtenir une intégrale sur le contour du VER où les champs de déplacements microscopiques sont connus et remplacés :

$$\langle \mathbf{F}^m \rangle = \frac{1}{S} \int_{\Gamma_o} (\mathbf{F}^M \cdot \mathbf{X} dS + \mathbf{X} \cdot \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{S} \int_{\Gamma_o} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (\text{A.11})$$

Le théorème de la divergence est réutilisée pour transformer les deux premiers membres de la partie droite de l'équation précédente (A.11) et obtenir l'égalité des gradients de transformation aux deux échelles :

$$\langle \mathbf{F}^m \rangle = \mathbf{F}^M + \left(\frac{1}{S} \int_S \mathbf{X} dS \right) : \mathbf{G}^M + \frac{1}{S} \int_{\Gamma_o} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (\text{A.12})$$

Les deuxième et troisième termes du membre de droite de l'équation (A.12) doivent donc être nuls pour imposer en moyenne le gradient de la transformation dans la cellule. Le deuxième terme est nul puisque le centre du repère de la cellule est placé au centre de la cellule donc l'intégrale de la position ($\int_S \mathbf{X} dS$) est nulle. Le troisième terme est aussi nul, le champ \mathbf{w} étant périodique sur le contour de la cellule unitaire.

La seconde condition pour imposer les conditions aux limites périodiques en moyenne dans la cellule est que le gradient du gradient de la transformation macroscopique soit égal à la moyenne du second gradient microscopique. Nous écrivons donc le second gradient microscopique à partir de l'équation du champ de déplacement microscopique (équation A.1) :

$$\mathbf{G}^m = \nabla(\nabla \bar{\mathbf{u}}) + \nabla(\nabla \mathbf{w}). \quad (\text{A.13})$$

La relation précédente (A.13) est intégrée sur la surface de la cellule unitaire et est divisée par la surface S pour obtenir la moyenne du second gradient de la transformation microscopique :

$$\langle \mathbf{G}^m \rangle = \frac{1}{S} \int_S (\nabla(\nabla \bar{\mathbf{u}}) + \nabla(\nabla \mathbf{w})) dS. \quad (\text{A.14})$$

Le théorème de la divergence est utilisée sur l'équation précédente (A.15) pour obtenir une intégrale sur le contour du VER où les champs de déplacements sont connus :

$$\langle \mathbf{G}^m \rangle = \frac{1}{S} \int_{\Gamma_o} \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \frac{1}{S} \int_{\Gamma_o} \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (\text{A.15})$$

Le théorème de la divergence est réutilisée pour transformer le premier membre de la partie droite de l'équation précédente (A.15) et obtenir l'égalité du second gradient de transformation aux deux échelles :

$$\langle \mathbf{G}^m \rangle = \mathbf{G}^M + \frac{1}{S} \int_{\Gamma_o} \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (\text{A.16})$$

Le second terme du membre de droite de l'équation (A.16) doit donc être nul pour imposer en moyenne les conditions aux limites périodiques dans la cellule, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{S} \int_{\Gamma} \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \quad (\text{A.17})$$

Cette dernière équation (A.17) n'est pas assurée par la condition de périodicité du champ \mathbf{w} . Dans la littérature, aucun schéma d'homogénéisation périodique du second ordre impose exactement cette condition sur la dérivée du champ de déplacement inconnu. Dans Kouznetsova [KOU 04], deux conditions sur le champ \mathbf{w} sont imposées pour satisfaire l'équation (A.17). Cette condition se résume au fait que l'intégrale du champ microscopique inconnu le long de deux bords adjacents (les deux bords restants sont implicitement contraints avec la relation de périodicité) doit être nulle :

$$\int_{\Gamma_{0_g}} \mathbf{w}_g d\Gamma_0 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_{0_b}} \mathbf{w}_b d\Gamma_0 = \mathbf{0}, \quad (\text{A.18})$$

où Γ_{0_g} et Γ_{0_b} représentent respectivement le contour initial des bords gauche et bas. En remplaçant le champ microscopique inconnu défini par l'équation (A.2), nous obtenons :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_{0_g}} \mathbf{u}_L^m d\Gamma_0 = \mathbf{F}^M \cdot \int_{\Gamma_{0_g}} \mathbf{X}_g d\Gamma_0 + \frac{1}{2} \mathbf{G}^M : \int_{\Gamma_{0_g}} \mathbf{X}_g \cdot \mathbf{X}_g d\Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_{0_b}} \mathbf{u}_b^m d\Gamma_0 = \mathbf{F}^M \cdot \int_{\Gamma_{0_b}} \mathbf{X}_b d\Gamma_0 + \frac{1}{2} \mathbf{G}^M : \int_{\Gamma_{0_b}} \mathbf{X}_b \cdot \mathbf{X}_b d\Gamma_0. \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Le membre gauche des équations (A.19) regroupe les déplacements inconnus des nœuds des bords gauche et bas de la cellule. Ces termes peuvent s'écrire comme une fonction linéaire de ces inconnues de déplacements affectées de coefficient dépendant du maillage des bords. Les membres de droite des équations peuvent se calculer analytiquement pour tout tenseur des déformations \mathbf{F}^M et \mathbf{G}^M . En effet, les intégrales des différentes positions initiales du bord gauche (valides aussi pour le bord bas) sont égales à :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_{0_g}} 1 d\Gamma_0 = [s]_{-L/2}^{L/2} = L, \\ \int_{\Gamma_{0_g}} s d\Gamma_0 = [s^2]_{-L/2}^{L/2} = 0, \\ \int_{\Gamma_{0_g}} s^2 d\Gamma_0 = [s^3]_{-L/2}^{L/2} = \frac{L^3}{12}. \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

En utilisant ces relations pour simplifier les termes de droite de l'équation (A.19), la condition cinématique de l'application en moyenne des champs de déplacements

se résume à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_{0g}} \mathbf{u}_L^m d\Gamma_0 = \left(-\frac{L^2}{2}\right) \mathbf{F}^M \cdot \mathbf{e}_x + \frac{L^3}{8} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{e}_x + \frac{L^3}{24} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{e}_y \\ \int_{\Gamma_{0b}} \mathbf{u}_B^m d\Gamma_0 = \left(-\frac{L^2}{2}\right) \mathbf{F}^M \cdot \mathbf{e}_y + \frac{L^3}{24} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{e}_x + \frac{L^3}{8} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{G}^M \cdot \mathbf{e}_y. \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

Les deux conditions cinématiques sur les déplacements du bord (les conditions aux limites périodiques de l'équation (A.7) et le maintien en moyenne des champs de déplacement de l'équation (A.21)) mènent à des contraintes de Dirichlet sur le contour du problème microscopique. Ces conditions aux limites seront appliquées via le logiciel élément finis Cast3M [VER 88].

Annexe B

Calcul des paramètres élastiques de la souplesse

Le comportement de la cellule unitaire est choisi cubique. En plus du module de Young E et du coefficient de Poisson ν , nous considérons que le module de cisaillement G n'est pas lié à ces deux paramètres et est donc inconnu. La matrice de souplesse \mathbf{S} est donc égale à :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu^*} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La cellule unitaire est chargée suivant trois directions différentes (0, 30 et 45 degrés). Connaissant les contraintes et déformations dans le repère du chargement, nous devons calculer la matrice de souplesse dans le repère du chargement afin d'identifier ces paramètres. La matrice de souplesse dans le repère du chargement \mathbf{S}_θ est donc égale en fonction de la matrice de souplesse \mathbf{S} à :

$$\mathbf{S}_\theta = \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{S} \mathbf{B}_\theta \quad (\text{B.2})$$

où la matrice \mathbf{B}_θ est la matrice de rotation du repère égale à :

$$\mathbf{B}_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sqrt{2}\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta\sin\theta & -\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Par la suite, les termes $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont remplacés respectivement par c et s pour la lisibilité des équations. Après calcul, la matrice de souplesse dans le repère du chargement est égale à :

$$\mathbf{S}_\theta = \begin{pmatrix} (1 - 2(1 + \nu)s^2c^2)\frac{1}{E} + 2s^2c^2\frac{1}{\mu^*} & (2(1 + \nu)s^2c^2 - \nu)\frac{1}{E} - 2s^2c^2\frac{1}{\mu^*} & \sqrt{2}sc(c^2 - s^2)(\frac{1 + \nu}{E} - \frac{1}{\mu^*}) \\ (2(1 + \nu)s^2c^2 - \nu)\frac{1}{E} - 2s^2c^2\frac{1}{\mu^*} & (1 - 2(1 + \nu)s^2c^2)\frac{1}{E} + 2s^2c^2\frac{1}{\mu^*} & -\sqrt{2}sc(c^2 - s^2)(\frac{1 + \nu}{E} - \frac{1}{\mu^*}) \\ \sqrt{2}sc(c^2 - s^2)(\frac{1 + \nu}{E} - \frac{1}{\mu^*}) & -\sqrt{2}sc(c^2 - s^2)(\frac{1 + \nu}{E} - \frac{1}{\mu^*}) & \frac{1}{\mu^*} - 4s^2c^2(\frac{1 + \nu}{E} + \frac{1}{\mu^*}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Les contraintes et les déformations sont liées par cette matrice suivant la relation :

$$\mathbf{S}_\theta \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{E} \quad (\text{B.5})$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ et \mathbf{E} sont les contraintes et les déformations homogénéisées dans la cellule unitaire lors d'un chargement élastique. Elles sont égales dans ce cas à :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_x & (\Sigma_{xx}) \\ \Sigma_y & (\Sigma_{yy}) \\ \sqrt{2}\Sigma_{xy} & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x & (E_{xx}) \\ E_y & (E_{yy}) \\ \sqrt{2}E_{xy} & \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Cette relation (B.5) donne trois équations dépendant des trois paramètres E , ν et μ^* .

Premier cas : $\theta = 0^\circ$: Dans le cas où la cellule n'est pas inclinée, la relation (B.5) donne les équations usuelles liant la contrainte et la déformation pour un matériau cubique :

$$\begin{cases} \Sigma_x \frac{1}{E} - \Sigma_y \frac{\nu}{E} = E_x \\ \Sigma_y \frac{1}{E} - \Sigma_x \frac{\nu}{E} = E_y \\ \Sigma_{xy} \frac{1}{\mu^*} = E_{xy} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Deuxième cas : $\theta = 45^\circ$: La cellule unitaire est inclinée de 45 par rapport au chargement. L'équation (B.5) donne trois équations liant la contrainte à la déformation dans la cellule unitaire en fonction des paramètres égaux à :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y) \frac{1}{E} - \frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y) \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2}(\Sigma_x - \Sigma_y) \frac{1}{\mu^*} = E_x \\ \frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y) \frac{1}{E} - \frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y) \frac{\nu}{E} - \frac{1}{2}(\Sigma_x - \Sigma_y) \frac{1}{\mu^*} = E_y \\ \Sigma_{xy} \frac{1}{E} + \Sigma_{xy} \frac{\nu}{E} = E_{xy} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Troisième cas : $\theta = 30^\circ$: Le dernier cas est la rotation de la cellule de 30 degrés par rapport au chargement. Les différentes valeurs trigonométriques de l'angle sont égales à :

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2} ; s = \frac{1}{2} ; c^2 s^2 = \frac{3}{16} ; c^2 - s^2 = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.9})$$

Après simplification, l'équation (B.5) donne trois équations liant la contrainte à la déformation dans la cellule unitaire en fonction des paramètres telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (5\Sigma_x + 3\Sigma_y - 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \mathbf{1}/E - (3\Sigma_x + 5\Sigma_y + 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \nu/E \\ + (3(\Sigma_x - \Sigma_y) + 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \mathbf{1}/\mu^* = E_x \\ (3\Sigma_x + 5\Sigma_y + 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \mathbf{1}/E - (3\Sigma_x + 5\Sigma_y - 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \nu/E \\ + (3(\Sigma_y - \Sigma_x) - 2\sqrt{6}\Sigma_{xy})/8 * \mathbf{1}/\mu^* = E_y \\ (\sqrt{3}(\Sigma_y - \Sigma_x) - 6\sqrt{2}\Sigma_{xy})/8 * \mathbf{1}/E + (\sqrt{3}(\Sigma_y - \Sigma_x) - 6\sqrt{2}\Sigma_{xy})/8 * \nu/E \\ + (\sqrt{3}(\Sigma_y - \Sigma_x) + 2\sqrt{2}\Sigma_{xy})/8 * \mathbf{1}/\mu^* = E_{xy} \end{array} \right. \quad (\text{B.10})$$

Calcul du critère de Hill

Le critère plastique de Hill est une extension du critère plastique de Von Mises. Le critère f de Von Mises dépend du second invariant des contraintes J qui définit le début de la plastification d'un matériau isotrope. Dans notre cas, le matériau est anisotrope. A la place du second invariant des contraintes, la matrice de Hill est définie afin de calculer le critère plastique :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} F & -G & 0 \\ -G & F & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

où le critère plastique est donc :

$$f(\Sigma) = \sqrt{\Sigma^T \mathbf{H} \Sigma} - \Sigma_Y. \quad (\text{B.12})$$

Σ_S est la limite d'élasticité du matériau. Pour chaque orientation du matériau architecturé, le critère de charge plastique, avec l'ajout de la matrice de rotation \mathbf{B}_θ est égal à :

$$f(\Sigma) = \sqrt{\Sigma^T \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{H} \mathbf{B}_\theta \Sigma} - \Sigma_Y. \quad (\text{B.13})$$

Le calcul de la matrice de Hill dans le repère du chargement $\mathbf{H}_\theta = \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{H} \mathbf{B}_\theta$ donne :

$$\mathbf{H}_\theta = \begin{pmatrix} (1 - 2s^2c^2)F - 2s^2c^2(G - L) & (1 - 2s^2c^2)G + 2s^2c^2(F - L) & \sqrt{2}sc(c^2 - s^2)(F + G - L) \\ (1 - 2s^2c^2)G + 2s^2c^2(F - L) & (1 - 2s^2c^2)F - 2s^2c^2(G - L) & \sqrt{2}sc(c^2 - s^2)(-F - G + L) \\ \sqrt{2}sc(c^2 - s^2)(F + G - L) & \sqrt{2}sc(c^2 - s^2)(-F - G + L) & (1 - 4s^2c^2)L - 4s^2c^2(F + G) \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

La contrainte scalaire de Hill ($J_h = \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{H} \mathbf{B}_\theta \boldsymbol{\Sigma}$) est alors égale à :

$$J_h = \left[(1 - 2s^2c^2)(\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2) + 4s^2c^2\Sigma_x\Sigma_y + 2\sqrt{2}sc(c^2 - s^2)\Sigma_{xy}(\Sigma_x - \Sigma_y) - 4s^2c^2\Sigma_{xy}^2 \right] \textcolor{red}{F} + \\ \left[(4s^2c^2 - 2)\Sigma_x\Sigma_y - 2s^2c^2(\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2) + 2\sqrt{2}sc(c^2 - s^2)\Sigma_{xy}(\Sigma_x - \Sigma_y) - 4s^2c^2\Sigma_{xy}^2 \right] \textcolor{red}{G} + \\ \left[2s^2c^2(\Sigma_x - \Sigma_y)^2 + 2\sqrt{2}sc(c^2 - s^2)\Sigma_{xy}(\Sigma_y - \Sigma_x) + (1 - 4s^2c^2)\Sigma_{xy}^2 \right] \textcolor{red}{L} \quad (\text{B.15})$$

La plastification du matériau se fait pour une contrainte (Σ) annulant le critère de charge plastique f . La plastification est donc régie par l'équation scalaire suivante :

$$J_h = \Sigma_Y^2 \quad (\text{B.16})$$

Premier cas : $\theta = 0^\circ$: Dans le cas où la cellule n'est pas inclinée, la relation (B.16) donne l'équation classique pour le cas anisotrope lié au matériau :

$$(\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2) \textcolor{red}{F} - 2\Sigma_x\Sigma_y \textcolor{red}{G} + \Sigma_{xy}^2 \textcolor{red}{L} = \Sigma_Y^2 \quad (\text{B.17})$$

Deuxième cas : $\theta = 45^\circ$: La cellule unitaire est inclinée de 45 par rapport au chargement. L'équation (B.16) donne une équation scalaire en fonction des paramètres égales à :

$$\left[\frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y)^2 - \Sigma_{xy}^2 \right] \textcolor{red}{F} - \left[-\frac{1}{2}(\Sigma_x + \Sigma_y)^2 - \Sigma_{xy}^2 \right] \textcolor{red}{G} + \frac{1}{2}(\Sigma_x - \Sigma_y)^2 \textcolor{red}{L} = \Sigma_Y^2 \quad (\text{B.18})$$

Troisième cas : $\theta = 30^\circ$: Le dernier cas est la rotation de la cellule de 30 degrés par rapport au chargement. Après simplification, l'équation (B.16) donne une équation scalaire en fonction des paramètres telle que :

$$\left[\frac{5}{8}(\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2) + \frac{3}{4}\Sigma_x\Sigma_y + \frac{\sqrt{6}}{4}\Sigma_{xy}(\Sigma_x - \Sigma_y) - \frac{3}{4}\Sigma_{xy}^2 \right] \textcolor{red}{F} + \\ \left[-\frac{3}{8}(\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2) + \frac{5}{4}\Sigma_x\Sigma_y + \frac{\sqrt{6}}{4}\Sigma_{xy}(\Sigma_x - \Sigma_y) - \frac{3}{4}\Sigma_{xy}^2 \right] \textcolor{red}{G} + \\ \left[\frac{3}{8}(\Sigma_x - \Sigma_y)^2 + \frac{\sqrt{6}}{4}\Sigma_{xy}(\Sigma_y - \Sigma_x) + \frac{1}{4}\Sigma_{xy}^2 \right] \textcolor{red}{L} = \Sigma_Y^2 \quad (\text{B.19})$$

Annexe C

Transformée de Radon

La projection de Radon [BRA 95] établit la possibilité de reconstituer une fonction réelle à deux variables (assimilable à une image) à l'aide de la totalité de ses projections selon des droites concourantes. Ces projections portent le nom de sinogramme. L'application de ce théorème est la reconstruction d'images à partir de ces projections, surtout utilisé en imagerie médicale ou en tomographie. Dans notre cas d'utilisation, nous nous intéressons seulement à la construction du sinogramme à partir d'une image pour déterminer selon quelle droite nous obtenons la projection maximale du champ étudié.

La transformée de Radon d'une fonction de deux variables f est donnée par l'intégrale double selon la droite définie par son inclinaison θ et son ordonnée à l'origine b suivante :

$$T_f = \int_x \int_y [f(x, y) \cdot (x \cos \theta + y \sin \theta + b)] dx dy \quad (\text{A.1})$$

Démarche de calcul de la transformée de Radon

Définition des variables : Les deux paramètres, notés θ et ρ , du calcul de la transformée de Radon appartiennent aux intervalles suivants :

$$\begin{cases} \theta \in [0 ; 180[\\ \rho \in [-\frac{\rho_{max}}{2} ; \frac{\rho_{max}}{2}] \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où ρ_{max} est le nombre de points maximums d'une droite, inclinée d'un angle θ et passant par le centre, sur lesquels peuvent être projeté le champ soit :

$$\rho_{max} = \sqrt{m^2 + n^2}. \quad (\text{A.3})$$

Les valeurs m et n sont les dimensions de l'image f . La valeur ρ_i représente la distance du point de projection au centre de l'image (cette valeur peut être négative ou positive). Ces paramètres sont illustrés sur la Figure C.1 où l'image est centrée sur l'origine du repère.

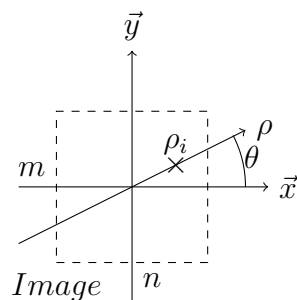


FIGURE C.1 – Définition des variables utilisées lors de la transformée de Radon

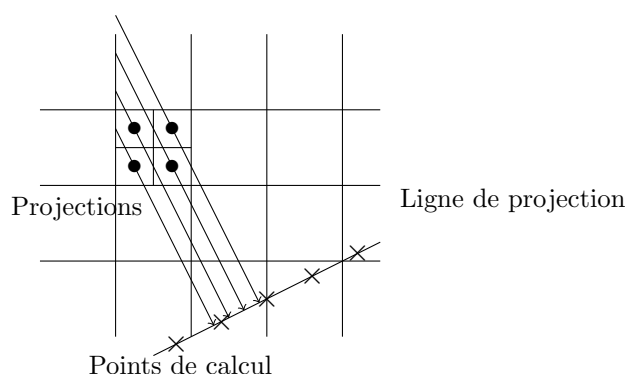


FIGURE C.2 – Projection des pixels sur la droite coupant le champ étudié.

Calcul de la transformée La transformée de Radon du champ est la somme de la transformée de chaque pixel pris individuellement. L'algorithme permettant le calcul de la transformée divise tout d'abord les pixels en quatre sous-pixels puis les projette séparément sur la droite définie par les paramètres. Cette projection est illustrée sur la Figure C.2.

Chaque projection des sous-pixels est ensuite proportionnellement divisée entre les deux points les proches (conformément à la distance entre la position de la projection et des points de calcul les plus proches). Si la projection du sous-pixel heurte le point de calcul alors ce point obtiendra la valeur du sous-pixel, équivalant à un quart de la valeur du pixel.

La transformée de Radon est donc calculée pour chaque angle comme la projection de tous les sous-pixels sur la droite inclinée définie par l'angle. La valeur de chaque sous-pixels est ensuite sommée entre deux points de calcul au maximum pour obtenir la transformée de Radon sur cette droite.

Un exemple simple

Pour comprendre comment "lire" le sinogramme calculé par la transformée de Radon, prenons un exemple simple. Soit une image carrée avec à l'intérieur un carré de valeur constante. L'image est représentée sur la Figure 5.3(a).

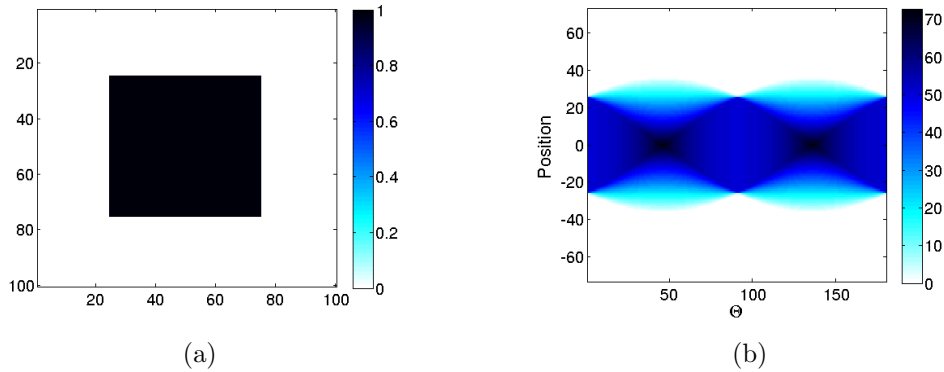


FIGURE C.3 – (a) Image exemple pour le calcul de la transformée de Radon ; (b) Sinogramme calculé

L'image est de taille 100×100 pixels ce qui donne un sinogramme de taille 142×180 représenté sur la Figure 5.3(b). Chaque colonne du sinogramme représente la projection de l'image sur la droite inclinée de l'angle choisi. Nous observons que les colonnes correspondant aux angles avoisinant les 0, 90 et 180 degrés, la valeur de la projection est sensiblement égale à la longueur d'un côté du carré central, soit 50. Les points de projection les éloignés du centre de l'image ont une valeur de projection nulle puisque la valeur projetée de l'image est nulle. En dehors de la dimension de l'image(50), les points de projection n'appartiennent plus à l'image.

La valeur de la projection augmente lorsque l'angle balaye les valeurs de 0 à 45 degrés où nous obtenons la valeur la plus grande. Cette valeur est obtenue au centre de l'image quand la somme des projections est la plus grande, soit égale à 71 (longueur de la diagonale du carré). Cette valeur est retrouvée au centre pour la droite inclinée à 135 degrés.

Annexe D

X-FEM

La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) [MOE 99] tire son origine de la problématique de la propagation de fissure. L'idée est d'introduire les discontinuités au sein des éléments finis pour éviter de remailler la structure. Cette introduction se fait via la technique de la partition de l'unité [MEL 96]. Cette technique est aussi utilisée dans les approches GFEM (*generalized finite element method*) ou PUFEM (*partition of unity finite element*). Nous pouvons aussi noter l'intérêt des fonctions de niveaux (*levels sets*) pour définir le support géométrique de la fissure et faire évoluer la position des surfaces de discontinuités [STO 01, SUK 01].

Rappel sur les méthodes de discrétisation

La méthode des éléments finis (MEF) a pour but de résoudre le système d'Equations D.1 écrit dans le cadre statique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{t} \text{ sur } \Gamma_t \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{c+} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{c-} \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

Le domaine Ω est discrétisé par un nombre n de nœuds. Les fonctions de forme \mathbf{N}_i avec $i \in n$ s'appuient sur ces nœuds. Le déplacement discrétisé $\bar{\mathbf{U}}$ s'écrit au point \mathbf{x} de l'espace tel que :

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \sum_i^N q_i \mathbf{N}_i(\mathbf{x}). \quad (\text{D.2})$$

Les fonctions de forme constituent une partition de l'unité sur le domaine Ω telle que :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (\text{D.3})$$

Méthodes des éléments finis étendus

Avec la condition précédente, la base des fonctions de forme est enrichie avec une fonction de forme ψ telle que :

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n_e} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) q_j^e, \quad (\text{D.4})$$

où les nœuds n_e (une partie des nœuds n ou tous) sont alors dits *enrichis*. Le déplacement standard est alors enrichi est par le champ de déplacement $\psi(\mathbf{x})$.

Dans une structure fissurée, le champ de déplacement est discontinu. Pour décrire ce phénomène, la fonction d'enrichissement est choisie discontinue. Avec la position exacte de la fissure dans la structure, la fonction de Heaviside H est introduite telle que :

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est au-dessus de la fissure} \\ +1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est en-dessous de la fissure} \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

L'approximation par les éléments finis étendus du champ de déplacement s'écrit donc :

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n_e} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) q_j^e \quad (\text{D.6})$$

La fonction de Heaviside peut donner lieu à différentes variantes de la fonction d'enrichissement [HAN 02, ZI 03]. Dans ce travail, la fonction d'enrichissement utilisées seront les fonctions dites décalées (*shifted*) telles que :

$$H'(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_i(H(\mathbf{x}) - H(x_i)), \quad (\text{D.7})$$

où x_i est la position du nœud où la fonction de forme \mathbf{N}_i est maximale. L'exemple en une dimension d'un barreau avec une fissure placée entre le nœud 2 et 3 est illustrée sur la Figure D.1. Les fonctions de forme classiques \mathbf{N}_i et la fissure sont représentées sur la Figure 5.1(a), les fonctions de forme d'enrichissement de Heaviside classiques sur la Figure 5.1(b) et les fonctions d'enrichissement décalées sur la Figure 5.1(c).

Ajout du déplacement en pointe de fissure

Le déplacement en pointe de fissure peut être ajouté avec des fonctions enrichies supplémentaires. Les solutions asymptotiques en pointe de fissure sont les solutions les plus judicieuses. La base de fonction d'enrichissement de la singularité dans les coordonnées cylindriques (r, θ) s'écrit :

$$B_\alpha = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \right]. \quad (\text{D.8})$$

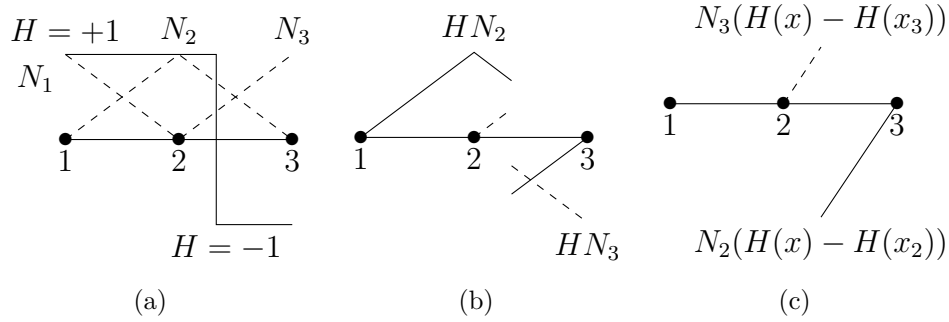


FIGURE D.1 – Fonction de Heaviside H (a), fonction d'enrichissement NH (b) et fonction d'enrichissement décalée $N(H - H(x_i))$ (c) pour une fissure placée entre les nœuds 2 et 3.

L'approximation du déplacement s'écrit alors :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n_e} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) q_j^e + \sum_{k=1}^{n_f} \sum_{\alpha=1}^4 \mathbf{N}_k(\mathbf{x}) B_{\alpha}(\mathbf{x}) q_k^f, \quad (\text{D.9})$$

où n^f sont les nœuds encadrant la pointe de la fissure.

X-DIC

La corrélation d'images classique, explicitée dans la Section 1.4.3, n'est pas adaptée à la mesure de champs de déplacement discontinus. Dans les algorithmes de corrélation d'images, l'incertitude de mesure diminue quand la taille des éléments augmente ce qui rend difficile la mesure de discontinuités. Le principe des éléments finis étendus présenté précédemment est appliqué dans le cadre de la corrélation d'images pour mesurer un champ de déplacement avec des discontinuités [RÉT 08].

Les fonctions de forme de saut ont été introduites dans l'identification du champ de déplacement par corrélation d'images. Les nœuds sélectionnés du maillage sont enrichis soit par la connaissance *a posteriori* de la position de la fissure soit par l'analyse du résidu de la corrélation qui donne la position de la discontinuité.

Deux champs de déplacement artificiel ont été étudiés, le premier est un champ de déplacement de corps rigide accompagné d'une discontinuité. Le second est un champ de déplacement élastique d'une fissure en mode I. Avec le premier champ, l'incertitude de déplacement de la corrélation d'images classique et de la corrélation d'image enrichie avec une discontinuité sont comparées sur la Figure 5.2(a). Avec le second champ, l'incertitude de déplacement de la corrélation d'images classique, de la corrélation d'image enrichie avec une discontinuité et de la corrélation d'images enrichie avec une discontinuité et les singularités sont comparées sur la Figure 5.2(b).

Les courbes, dans les deux cas, montrent une très nette amélioration de l'incertitude de mesure de la corrélation d'images avec l'ajout des enrichissements. Le calcul avec une discontinuité seule ne nécessite pas l'introduction des fonctions d'enrichissement associées à la singularité (Figure 5.2(a)). Dans nos expériences, la position de la fissure de la fissure est connue *a posteriori* et nous ne souhaitons pas calculer sa propagation mais le saut de déplacement causée par sa propagation. Nous nous limiterons donc à l'introduction de la fonction d'enrichissement de saut (fonction de Heaviside) dans la corrélation d'images.

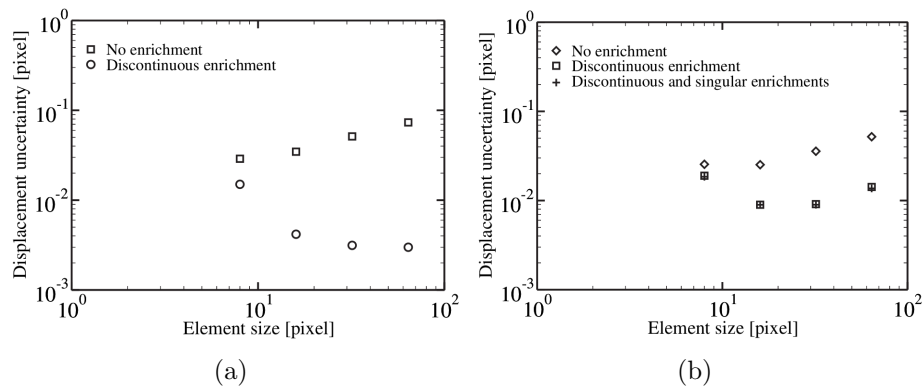


FIGURE D.2 – (a) Incertitude de déplacement pour un déplacement discontinu avec des éléments Q4 classiques et des éléments Q4 enrichis avec une discontinuité; (b) Incertitude de déplacement pour une fissure en mode I avec des éléments Q4 classiques, des éléments Q4 enrichis avec une discontinuité et des éléments Q4 enrichis avec une discontinuité et une singularité.

Annexe E

Cette annexe présente le dessin technique de l'éprouvette avec la structure architecturée non inclinée sur la Figure E.1. Les dimensions de l'éprouvette et les spécifications géométriques sont les mêmes pour les deux éprouvettes avec la structure architecturée inclinée.

Le dessin technique de l'éprouvette avec la structure architecturée de forme rectangulaire est présentée sur la Figure E.2.

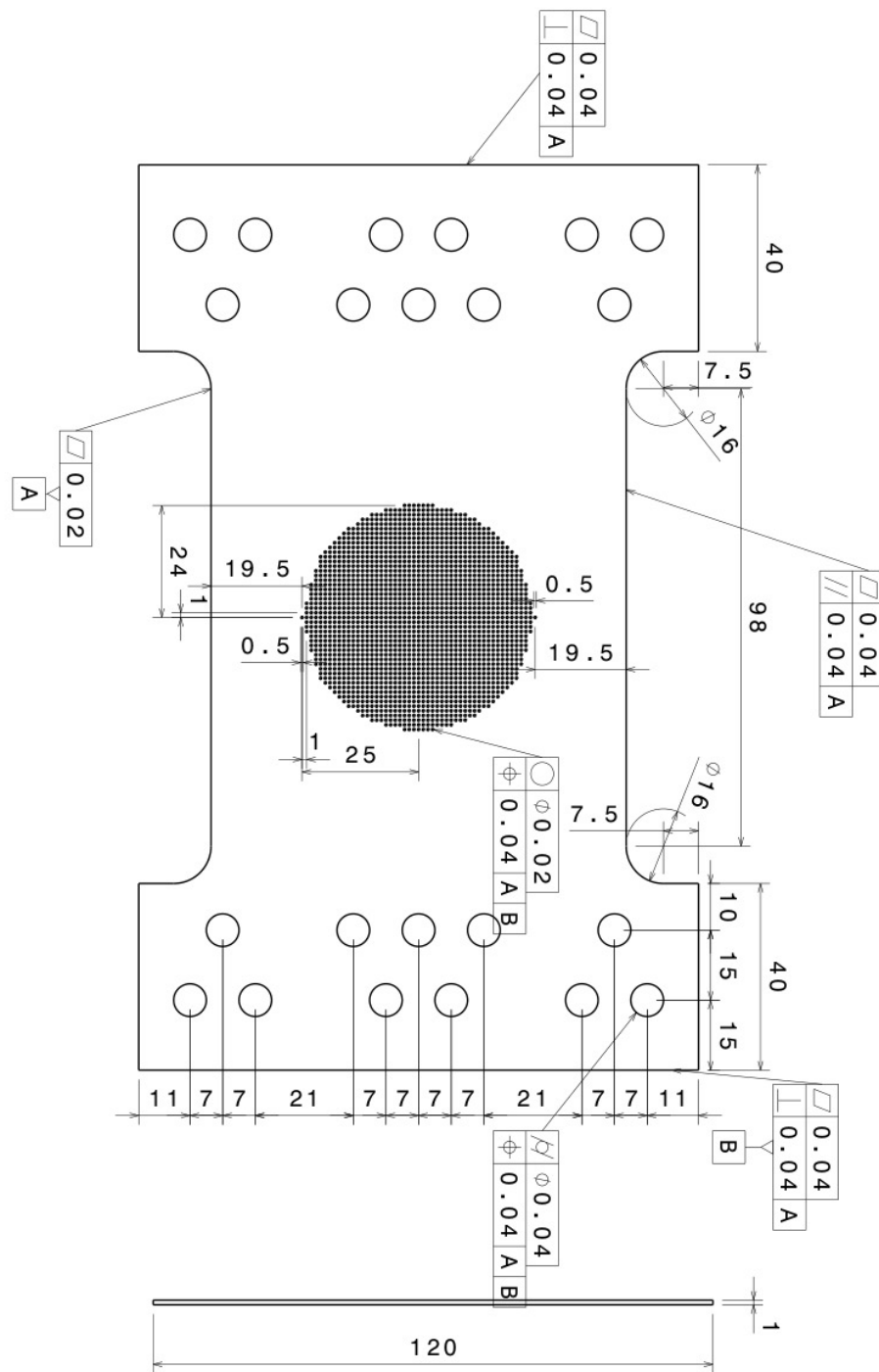


FIGURE E.1 – Dessin de définition de la plaque mince contenant la zone architecturée non inclinée.

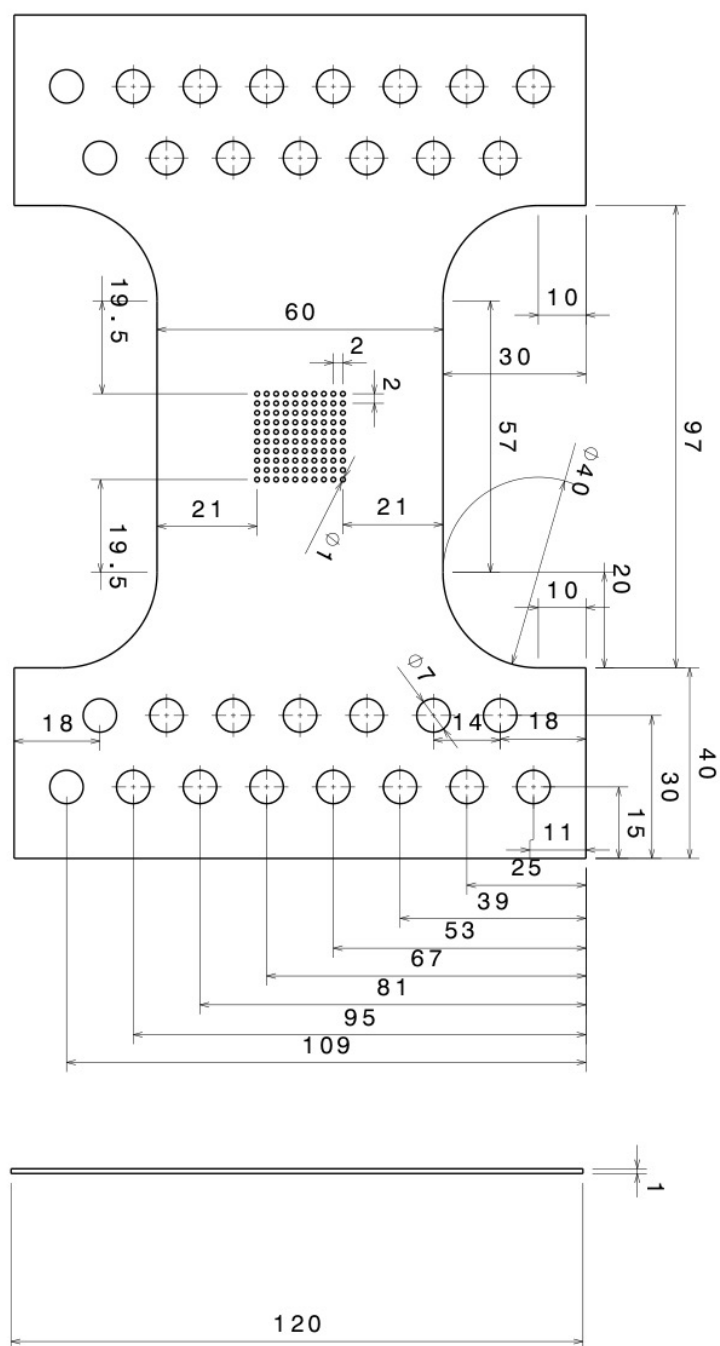


FIGURE E.2 – Dessin de définition de la plaque mince contenant la zone architecturée simple (carré de 10x10 trous).

Bibliographie

- [AUF 08] AUFFRAY N.
Comportement des matériaux cellulaires : élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés. Thèse de doctorat, 2008. Thèse de doctorat dirigée par Bréchet, Yves et Bouchet, Régis Matériaux, mécanique, génie civil, et électrochimie Grenoble, INPG 2008.
- [AVR 08] AVRIL S., BONNET M., BRETTELLE A. S., GREDIAC M., HILD F., IENNY P., LATOURTE F., LEMOSSE D., PAGANO S., PAGNACCO E., PIERRON F.
Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements. *Experimental Mechanics*, vol. 48, 2008, p. 381-402, Springer Boston. 10.1007/s11340-008-9148-y.
- [BEL 08] BELYTSCHKO T., LOEHNERT S., SONG J.-H.
Multiscale aggregating discontinuities : A method for circumventing loss of material stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 73, 2008, p. 869-894.
- [BEL 10] BELYTSCHKO T., SONG J.-H.
Coarse-graining of multiscale crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, n° 5, 2010, p. 537-563, John Wiley & Sons, Ltd.
- [BES 06] BESNARD G., HILD F., ROUX S.
Finite-Element Displacement Fields Analysis from Digital Images : Application to Portevin Le Chatelier Bands. *Experimental Mechanics*, vol. 46, n° 6, 2006, p. 789-803, Kluwer Academic Publishers.
- [BOR 01] BORNERT M., BRETHAU T., GILORMINI P., Eds. *Homogénéisation en mécanique des matériaux : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermès Science, 2001.
- [BRA 95] BRACEWELL R.
Two-dimensional imaging. 1995.
- [BRI 87] BRIGGS W.
A multigrid tutorial. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [COE 12] COENEN E., KOUZNETSOVA V., GEERS M.
Multi scale continuous discontinuous framework for computational homogeniza-

- tion localization. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 60, n° 8, 2012, p. 1486 - 1507.
- [DHI 98] DHIA H. B.
Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series {IIB} - Mechanics-Physics-Astronomy*, vol. 326, n° 12, 1998, p. 899 - 904.
- [DHI 05] DHIA H. B., RATEAU G.
The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, n° 11, 2005, p. 1442-1462, John Wiley & Sons, Ltd.
- [DHI 10] DHIA H. B., JAMOND O.
On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, n° 21-22, 2010, p. 1403 - 1414.
- [DVO 76] DVORAK G. J., MADHAVA RAO M.
Axisymmetric plasticity theory of fibrous composites. *International Journal of Engineering Science*, vol. 14, n° 4, 1976, p. 361 - 373.
- [DVO 87] DVORAK G., BAHEI-EL-DIN Y.
A bimodal plasticity theory of fibrous composite materials. *Acta Mechanica*, vol. 69, n° 1-4, 1987, p. 219-241, Springer-Verlag.
- [ESH 57] ESHELBY J.
The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 241, n° 1226, 1957, p. 376-396, The Royal Society.
- [FAR 91] FARHAT C., ROUX F.-X.
A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n° 6, 1991, p. 1205-1227, John Wiley & Sons, Ltd.
- [FEY 00] FEYEL F., CHABOCHE J. L.
FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, n° 3-4, 2000, p. 309 - 330.
- [FEY 03] FEYEL F.
A multilevel finite element method (FE2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, n° 28-30, 2003, p. 3233 - 3244. Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures.
- [FIS 95a] FISH J., BELSKY V.
Multi-grid method for periodic heterogeneous media Part 2 : Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 126, n° 1-2, 1995, p. 17 - 38.

- [FIS 95b] FISH J., BELSKY V.
Multigrid method for periodic heterogeneous media Part 1 : Convergence studies for one-dimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 126, n° 1-2, 1995, p. 1 - 16.
- [FOR 98] FOREST S., SAB K.
Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications*, vol. 25, n° 4, 1998, p. 449 - 454.
- [FOR 11] FOREST S., TRINH D.
Generalized continua and non-homogeneous boundary conditions in homogenisation methods. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 91, n° 2, 2011, p. 90–109, WILEY-VCH Verlag.
- [GAR 01] GARCIA D.
Mesures de formes et de champs de déplacement tridimensionnels par stereo-correlation d'images. Thèse de doctorat, INP Toulouse, 2001.
- [GEU 09] GEUZAIN C., REMACLE J.-F.
Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, 2009, p. 1309-1331.
- [HAN 02] HANSBO A., HANSBO P.
An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, n° 47–48, 2002, p. 5537 - 5552.
- [HAS 63] HASHIN Z., SHTRIKMAN S.
A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, n° 2, 1963, p. 127 - 140.
- [HIL 65] HILL R.
Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, n° 2, 1965, p. 89 - 101.
- [HIL 06] HILD F., ROUX S.
Digital Image Correlation : from Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties : a Review. *Strain*, vol. 42, n° 2, 2006, p. 69–80, Blackwell Publishing Ltd.
- [HIL 09] HILD F., ROUX S., GRAS R., GUERRERO N., MARANTE M. E., FLÓREZ-LÓPEZ J.
Displacement measurement technique for beam kinematics. *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 47, 2009, p. 495-503.
- [HOR 81] HORN B. K., SCHUNCK B. G.
Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, vol. 17, n° 1-3, 1981, p. 185 - 203.

- [HUT 76] HUTCHINSON J.
 Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 348, n° 1652, 1976, p. 101–127, The Royal Society.
- [JÄN 10] JÄNICKE R., DIEBELS S.
 Numerical homogenisation of micromorphic media. *Technische Mechanik*, vol. 30, n° 4, 2010, p. 364–373.
- [KAC 08] KACZMARCZYK L., PEARCE C. J., BIĆANIĆ N.
 Scale transition and enforcement of RVE boundary conditions in second-order computational homogenization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74, 2008, p. 506–522.
- [KAN 03] KANIT T., FOREST S., GALLIET I., MOUNOURY V., JEULIN D.
 Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of solids and structures*, vol. 40, n° 13, 2003, p. 3647–3679, Elsevier.
- [KAV 71] KAVANAGH K. T., CLOUGH R. W.
 Finite element applications in the characterization of elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, n° 1, 1971, p. 11 - 23.
- [KOU 02] KOUZNETSOVA V. G.
 Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven, 2002.
- [KOU 04] KOUZNETSOVA V., GEERS M., BREKELMANS W.
 Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, 2004, p. 5525–5550.
- [LAD 99] LADEVÈZE P.
Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and non-Incremental Methods of Calculation. Springer, 1999.
- [LAG 98] LAGARIAS J., REEDS J. A., WRIGHT M. H., WRIGHT P. E.
 Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, vol. 9, 1998, p. 112–147.
- [LEC 09] LECLERC H., PÉRIÉ J.-N., ROUX S., HILD F.
 Integrated Digital Image Correlation for the Identification of Mechanical Properties. GAGALOWICZ A., PHILIPS W., Eds., *Computer Vision/Computer Graphics Collaboration Techniques*, vol. 5496 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 161–171 Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [LEC 12] LECLERC H., PÉRIÉ J.-N., HILD F., ROUX S.
 Digital volume correlation : what are the limits to the spatial resolution ? *Mechanics & Industry*, vol. 13, 2012, p. 361–371.
- [LEM 09] LEMAITRE J., CHABOCHE J.-L., BENALLAL A., DESMORAT R.
Mécanique des matériaux solides. Dunod, 2009.

-
- [MAS 00] MASSON R., BORNERT M., SUQUET P., ZAOUI A.
An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, 2000, p. 1203 - 1227.
- [MAS 07] MASSART T. J., PEERLINGS R. H. J., GEERS M. G. D.
An enhanced multi-scale approach for masonry wall computations with localization of damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 69, n° 5, 2007, p. 1022–1059, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MEL 96] MELENK J., BABU~SKA I.
The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n° 1–4, 1996, p. 289 - 314.
- [MIC 03] MICHEL J., SUQUET P.
Nonuniform transformation field analysis. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, n° 25, 2003, p. 6937 - 6955. Special issue in Honor of George J. Dvorak.
- [MIC 04] MICHEL J., SUQUET P.
Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, 2004, p. 5477 - 5502. Advances in Computational Plasticity.
- [MOE 99] MOES N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T.
A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, n° 1, 1999, p. 131–150, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MOR 73] MORI T., TANAKA T.
Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, vol. 21, n° 5, 1973, p. 571 - 574.
- [ODE 97] ODEN J. T., ZOHDI T. I.
Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 148, n° 3-4, 1997, p. 367 - 391.
- [OLS 75] OLSON G., COHEN M.
Kinetics of strain-induced martensitic nucleation. *Metallurgical transactions A*, vol. 6, n° 4, 1975, p. 791–795, Springer.
- [PON 91] PONTE CASTAÑEDA P.
The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 39, n° 1, 1991, p. 45 - 71.
- [RÉT 07] RÉTHORÉ J., ROUX S., HILD F.
Shear-band capturing using a multiscale extended digital image correlation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, n° 49-52, 2007, p. 5016 - 5030.
-

- [RÉT 08] RÉTHORÉ J., HILD F., ROUX S.
Extended digital image correlation with crack shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 73, n° 2, 2008, p. 248–272, John Wiley & Sons, Ltd.
- [RÉT 10a] RÉTHORÉ J.
A fully integrated noise robust strategy for the identification of constitutive laws from digital images. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, n° 6, 2010, p. 631–660, John Wiley & Sons, Ltd.
- [RÉT 10b] RÉTHORÉ J., ELGUEDJ T., SIMON P., CORET M.
On the Use of NURBS Functions for Displacement Derivatives Measurement by Digital Image Correlation. *Experimental Mechanics*, vol. 50, 2010, p. 1099–1116.
- [RÉT 13] RÉTHORÉ J., MUHIBULLAH, ELGUEDJ T., CORET M., CHAUDET P., COMBESURE A.
Robust identification of elasto-plastic constitutive law parameters from digital images using 3D kinematics. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, n° 1, 2013, p. 73 - 85.
- [ROU 06] ROUX S., HILD F.
Stress intensity factor measurements from digital image correlation : post-processing and integrated approaches. *International Journal of Fracture*, vol. 140, n° 1-4, 2006, p. 141–157, Kluwer Academic Publishers.
- [SAN 88] SANCHEZ-PALENCIA E., ZAOUI A.
Homogenization Techniques for Composite Media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 68, n° 6, 1988, p. 212–212, WILEY-VCH Verlag.
- [SMI 98] SMIT R., BREKELMANS W., MEIJER H.
Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 155, n° 1, 1998, p. 181–192, Elsevier.
- [SOL 10] SOLOMON N., SOLOMON I.
Deformation induced martensite in AISI 316 stainless steel. *revista de metalurgia*, vol. 46, n° 2, 2010, p. 121–128.
- [STO 01] STOLARSKA M., CHOPP D. L., MOËS N., BELYTSCHKO T.
Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, n° 8, 2001, p. 943–960, John Wiley & Sons, Ltd.
- [SUK 01] SUKUMAR N., CHOPP D. L., MOËS N., BELYTSCHKO T.
Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 46–47, 2001, p. 6183 - 6200.
- [SUN 05] SUN Y., PANG J. H. L., WONG C. K., SU F.
Finite element formulation for a digital image correlation method. *Appl. Opt.*, vol. 44, n° 34, 2005, p. 7357–7363, OSA.

- [SUT 83] SUTTON M. A., WOLTERS W. J., PETERS W. H., RANSON W. F., McNEILL S. R.
Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, vol. 1, n° 3, 1983, p. 133 - 139.
- [SUT 09] SUTTON M. A., ORTEU J.-J., SCHREIER H.
Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements : Basic Concepts, Theory and Applications. 2009.
- [VER 88] VERPEAUX P., CHARRAS T., MILLARD A.
CASTEM 2000 une approche moderne du calcul des structures. Pluralis, 1988.
- [YAN 14] YANG R.-C.
A regularized finite-element digital image correlation for irregular displacement field. *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 56, n° 0, 2014, p. 67 - 73.
- [YVO 07] YVONNET J., HE Q.-C.
The reduced model multiscale method (R3M) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *Journal of Computational Physics*, vol. 223, n° 1, 2007, p. 341 - 368.
- [ZAO 00] ZAOUI A., MASSON R.
Micromechanics-based modeling of plastic polycrystals : an affine formulation. *Materials Science and Engineering : A*, vol. 285, 2000, p. 418 - 424.
- [ZAO 01] ZAOUI A.
Homogénéisation en mécanique des matériaux : comportement non linéaires et problèmes ouverts, Chapitre Plasticité : approches en champ moyen, p. 17-44. Hermès Science, 2001.
- [ZI 03] ZI G., BELYTSCHKO T.
New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, n° 15, 2003, p. 2221-2240, John Wiley & Sons, Ltd.
- [ZOH 96] ZOHDI T. I., ODEN J. T., RODIN G. J.
Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 138, n° 1-4, 1996, p. 273 - 298.

NOM : MARTY

DATE de SOUTENANCE : 5 février 2015

Prénoms : Jérémie, Pascal, Jean

TITRE : Analyse expérimentale des cinématiques de changement d'échelles en mécanique non-linéaire

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2014-ISAL-XXXX

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RÉSUMÉ : L'industrie se tourne de plus en plus vers les matériaux composites pour leurs très bonnes capacités spécifiques. A l'échelle de la microstructure leur comportement est fortement hétérogène mais à l'échelle de la structure ceux-ci peuvent être considérés homogènes. Les méthodes multi-échelles ont été développées pour résoudre les problèmes de structure avec un temps de calcul raisonnable. Ces méthodes sont en général validées par comparaison avec un calcul numérique où les hétérogénéités sont entièrement maillées.

Dans ce travail de thèse, une structure architecturée modèle a été créée au centre d'une plaque (homogène) mince en acier inoxydable (304L). La cellule unitaire du matériau architecturé est constituée d'un carré percé d'un trou en son centre. L'utilisation d'une caméra à très haute résolution (270 millions de pixels) permet de suivre simultanément l'évolution des déformations aux échelles microscopique et macroscopique. La variation de l'orientation de la structure architecturée par rapport au chargement macroscopique modifie les sollicitations appliquées aux cellules unitaires.

Les expériences réalisées ont pour but d'analyser les cinématiques de déformation des cellules unitaires sous un chargement multi-axial. La mesure de champs permet une analyse quantitative des cinématiques des cellules unitaires et d'investiguer la pertinence des manières de réaliser les changements d'échelles dans le domaine linéaire et non-linéaire. Le passage de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique est particulièrement étudié grâce à la déformation de la frontière des cellules.

A partir de ces mesures, une homogénéisation linéaire et non-linéaire des cellules ayant une cinématique périodique est proposée. La géométrie de la cellule unitaire introduit des symétries dans le comportement du milieu homogène équivalent (MHE), celui-ci devient cubique. Les caractéristiques élastiques du MHE sont obtenus par homogénéisation à partir des résultats expérimentaux. Un critère de Tsai-Hill est identifié dans le domaine non-linéaire.

Enfin, on s'intéresse à la fissuration de la zone architecturée et à l'initiation de la localisation des déformations dans les cellules. Le support de la localisation est calculé à partir du champ des déformations mesurées. La cinématique de la cellule est enrichie avec une discontinuité et le saut de déplacement normal à la fissure est identifié à partir des cinématiques à l'échelle microscopique. Une comparaison avec le saut de déplacement calculé par corrélation d'images étendue à l'échelle macroscopique est menée afin de valider la stratégie d'extraction de la discontinuité à l'échelle microscopique.

MOTS-CLÉS : Corrélation d'images, méthodes multi-échelles, milieu d'ordre supérieur, mécanique non-linéaire, fissuration

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures

UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon

18-20 rue des Sciences

69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Alain Combescure

Président du jury : le président

Composition du jury : M. Samuel Forest

M. Michel Coret

M. Pierre Kerfriden

M. Julien Réthoré

M. Rafael Estevez

M. Julien Yvonnet

M. Alain Combescure